Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

08.07.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 12

Aufgabe 1 (Das Kreuz) (4 Punkte)
Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Zeigen Sie, dass $M \setminus \{0\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber nicht ganz M.

Aufgabe 2 (Extremwerte unter Nebenbedingungen) (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Extremstellen und Extremwerte der Funktion $\varphi : \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\} = \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3.$$

Aufgabe 3 (Separation der Variablen) (4 Punkte)
Seien $f(t) \in C^0(I)$, $g(x) \in C^0(J)$ wobei I, J offene Intervalle und $g(x) \neq 0$ sind. Wir betrachten für $(t_0, x_0) \in I \times J$

$$x'(t) = \frac{f(t)}{g(x(t))} \quad \text{für } t \in I, x(t_0) = x_0 \quad \text{mit } (t_0, x_0) \in I \times J.$$

Seien $F \in C^1(I)$, $G \in C^1(J)$ die Stammfunktionen von f, g mit $F(t_0) = G(x_0) = 0$. Gilt $F(I) \subset G(J)$, so ist $x(t) = G^{-1}(F(t))$ Lösung des Anfangswertproblems.

(i) Zeigen Sie den obigen Satz zur Separation der Variablen.

(ii) Lösen Sie damit die Gleichung

$$x' = x^2 \quad \text{mit } x_0 > 0.$$

(iii) Lösen Sie damit die Gleichung

$$x' = \frac{2tx}{1+t^2}.$$

Aufgabe 4 (Räuber-Beute-Modell) (4 Punkte)
Die Funktionen $x, y \in C^1(I)$ seien Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$x' = (\alpha - \beta y)x$$
$$y' = (-\gamma + \delta x)y$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Zeigen Sie: Für $H(x,y) = \gamma \log x - \delta x + \alpha \log y - \beta y$ ist $H(x(t), y(t))$ konstant. Folgern Sie, dass die Lebensdauer einer Lösung mit Anfangsdaten $x_0, y_0 > 0$ gleich $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)
Besprechen Sie die Konvergenz der Picard-Iterationen, rechnen Sie dazu die Beispiele

$$x' = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x(0) = 1$$

sowie, allgemeiner

$$x' = Ax \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ in Jordan'scher Normalform}, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Abgabe: Montag, 15.07.2024, 10:30 Uhr.