

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 2

Aufgabe 1 (Grundlagen Topologie)

(4 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$
- (ii) $A = A^\circ \Leftrightarrow A$ ist offen, $A = \bar{A} \Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen
- (iii) A° ist offen, \bar{A} ist abgeschlossen
- (iv) $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$

Aufgabe 2 (Metriken)

(4 Punkte)

Sei im folgenden $X = \mathbb{R}$. (i) Wir betrachten die beiden Metriken

$$d_1(x, y) = |x - y|, \quad d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Zeigen Sie, dass die Topologien die durch d_1 und d_2 induziert werden äquivalent sind.

(ii) Zeigen Sie, dass die diskrete Topologie durch die diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ 0, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

induziert wird.

(iii) Zeigen Sie, dass keine Metrik die indiskrete Topologie induziert.

Aufgabe 3 (Konvergenz von Teilfolgen)

(4 Punkte)

Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$. Zeigen Sie, dass wenn jede Teilfolge von (x_k) eine weitere Teilfolge enthält, die gegen x konvergiert, dann konvergiert die gesamte Folge gegen x .

Aufgabe 4 (Beschränkte Metriken)

(4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es eine Metrik d' auf X gibt, die die gleiche Topologie induziert wie d , sodass gilt

$$\sup_{x, y \in X} d'(x, y) \leq 1.$$

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)

Besprechen Sie den Satz von Heine-Borel. Betrachten Sie die Menge $C^0([0, 1])$ aller stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Beweisen Sie die Vollständigkeit und konstruieren Sie eine Folge, die keine konvergente Teilfolge enthält.

Brückenkurs: In diesem Semester soll ein Brückenkurs zu Linearer Algebra stattfinden:

<https://home.mathematik.uni-freiburg.de/knies/lehre/bkla/index1.html>

Bitte melden Sie sich bei Interesse an Frau Susanne Knies susanne.knies@math.uni-freiburg.de

Abgabe: Montag, 29.04.2024, 10:30 Uhr.