Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

29.04.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 3

Aufgabe 1 (Normierte Vektorräume) (4 Punkte)
Beweisen Sie Proposition 1.3.5: Ein normierter Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum und die Topologie ist Hausdorffsch.

Aufgabe 2 (Konvexität) (4 Punkte)
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Eine Menge $E \subset X$ heißt *konvex* falls für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt, dass $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$.

(i) Sei X ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ konvex ist.

(ii) Sei X ein Prähilbertraum. Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)}$ strikt konvex im folgenden Sinn ist: Falls $x, y \in \overline{B_1(0)}$, $x \neq y$ und $\lambda \in (0,1)$, so gilt $||\lambda x + (1-\lambda)y|| < 1$.
Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f(\lambda) = ||\lambda x + (1-\lambda)y||^2$ und deren zweite Ableitung.

Aufgabe 3 (Äquivalenz der p-Normen) (4 Punkte)
Zeigen Sie direkt die Äquivalenz der p-Normen für $p \in [1, \infty]$ auf $\mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$||x||_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \qquad \text{für } p \in [1, \infty)$$

bzw

$$||x||_\infty = \max_{j \in \{1,\dots,n\}} |x_j|$$

indem Sie explizit Konstanten c und C für die Ungleichung

$$c||x||_q \leq ||x||_p \leq C||x||_q \quad \text{für } p, q \in [1, \infty]$$

angeben.

Aufgabe 4 (Prähilberträume) (4 Punkte)
Sei X ein Prähilbertraum und $x, y \in X$.

(i) Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

(ii) Zeigen Sie die Parallelogrammidentität

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

der durch das Skalarprodukt induzierten Norm $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

Aufgabe 5 (Gleiche Anwesenheitsaufgabe, zweiter Versuch)
Besprechen Sie den Satz von Heine-Borel. Betrachten Sie die Menge $C^0([0,1])$ aller stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm $||f||_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Beweisen Sie die Vollständigkeit und konstruieren Sie eine Folge, die keine konvergente Teilfolge enthält.

Abgabe: Montag, 06.05.2024, 10:30 Uhr.