Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

06.05.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 4

Aufgabe 1 (Hausdorffabstand) (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\mathcal{A} \subset 2^X$ die Menge aller abgeschlossenen, nichtleeren und beschränkten Teilmengen von X. Für $A \subset X$ setzen wir

$$A_\eta = \bigcup_{x \in A} \{y \in X : d(x, y) < \eta\}.$$

Zeigen Sie, dass mit

$$d_H(X, Y) = \inf\{\eta \geq 0 : X \subset Y_\eta \text{ und } Y \subset X_\eta\}$$

eine Metrik auf $\mathcal{A}$ definiert ist.

Bemerkung: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes heißt beschränkt, wenn es für ein $R > 0$ eine R-Kugel gibt, welche A enthält.

Aufgabe 2 (Zusammenhang) (4 Punkte)

Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, falls aus $E \subset X$, $E \neq \emptyset$, E offen und E abgeschlossen folgt $E = X$.

(i) Zeigen Sie, dass die (verallgemeinerten) Intervalle genau die (bezüglich der Unterraumtopologie) zusammenhängenden Teilmengen der reellen Zahlen (mit dem üblichen Abstand) darstellen.

(ii) Ein topologischer Raum heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0, 1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ gibt. Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist wenn X wegzusammenhängend ist.

Tipp: Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen. Auch sind stetige Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen (warum?).

Bemerkung: Es gibt zusammenhängende, aber nicht wegzusammenhängende metrische Räume.

Aufgabe 3 (Stetige Bilder) (4 Punkte)

Seien $(X, \mathcal{T}_\mathcal{X})$, $(Y, \mathcal{T}_\mathcal{Y})$ topologische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig.

(i) Sei $A \subset X$ kompakt. Zeigen Sie, dass auch $f(A)$ kompakt ist.

(ii) Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Zeigen Sie, dass auch $f(A)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (Kompaktheit im Endlichdimensionalen) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume genau dann kompakt sind, wenn sie abgeschlossen und beschränkt sind.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)

Besprechen Sie den Satz, dass stetige, reellwertige Funktionen auf Kompakta ihr Minimum und Maximum annehmen. Finden Sie Beispiele für zusammenhängende und nichtzusammenhängende Mengen.

Abgabe: Montag, 13.05.2024, 10:30 Uhr.