Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

13.05.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 5

Aufgabe 1 (Gradient, Rotation, Divergenz) (4 Punkte)
Die Differentialoperatoren grad, rot und div sind im $\mathbb{R}^3$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\text{grad } f &= (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f),\\ \text{rot } X &= (\partial_2 X_3 - \partial_3 X_2, \partial_3 X_1 - \partial_1 X_3, \partial_1 X_2 - \partial_2 X_1),\\ \text{div } X &= \partial_1 X_1 + \partial_2 X_2 + \partial_3 X_3.\end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie für $f \in C^2(\Omega)$ und $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, dass

$$\text{rot grad } f = 0, \quad \text{div rot } X = 0.$$

(ii) Sei $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit $g(x) = -x/|x|^3$. Zeigen Sie, dass das Gravitationsfeld g weg vom Ursprung quellen- und wirbelfrei ist, d.h. es gilt

$$\text{div } g = 0, \quad \text{rot } g = 0.$$

Aufgabe 2 (Ableitung der Determinante) (4 Punkte)

(i) Begründen Sie, dass $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit $f(X) = \det(X)$ an der Stelle $X = E_n$ differenzierbar ist mit der Ableitung

$$Df(E_n)H = \text{tr}(H) \quad \text{für } H = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

wobei $tr(H) = \sum_{i=1}^n h_{ii}$ die Spur von H bezeichnet.

Hinweis: Die Ableitung $Df(E_n) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definiert eine lineare Abbildung auf dem Raum der quadratischen Matrizen. Für die Determinante können Sie z.B. die Leibniz-Formel verwenden:

$$\det(X) = \sum_{\sigma\in S_n} \text{sign}(\sigma) x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \quad \text{für } X = (x_{ij}).$$

(ii) Sei $X \in GL(n, \mathbb{R})$ ein Element der allgemeinen linearen Gruppe. Zeigen Sie für $f(X) = \det X$, dass

$$Df(X)H = (\det X)\text{tr}(X^{-1}H).$$

Aufgabe 3 (Richtungsableitungen und Stetigkeit) (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass in $p = (0, 0)$ alle Richtungsableitungen existieren, also für alle $v \in \mathbb{R}^2$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}$$

existiert.

(ii) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ nicht stetig (und somit nicht differenzierbar) ist. Kann man auch schon direkt an den berechneten Richtungsableitungen sehen, dass diese nicht von einer totalen Ableitung kommen können? Wenn ja, wie?

Aufgabe 4 (Partielle Ableitung) (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^\ell$ partiell differenzierbar. Seien die partiellen Ableitungen von f beschränkt, d.h. für alle $i = 1, \dots, k$ gelte $\sup_{x \in U} |\partial_i f(x)| < \infty$. Zeigen Sie, dass dann f stetig ist.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)
Besprechen Sie das Konzept des totalen Differentials im $\mathbb{R}^n$ im Sinne einer linearen Approximation einer Funktion. Illustrieren Sie dies anhand von Beispielen.

Abgabe: Montag, 27.05.2024, 10:30 Uhr.