Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner 27.05.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 6

Aufgabe 1 (Ableitung von Skalarprodukten) (4 Punkte)
Sei $(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ und $f,g\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ mit $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Überprüfen Sie die Differenzierbarkeit von $(f(x),g(x))$ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 2 (Jacobimatrix) (4 Punkte)
Seien die Funktionen $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{1+x^2+y^2},\frac{y}{1+x^2+y^2},\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)^T,\quad g(\xi,\eta,\zeta)=\left|\left(\xi,\eta,\zeta-\frac{1}{2}\right)^T\right|.$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix von f, g und $g\circ f$.

Aufgabe 3 (Richtungsableitungen) (4 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen (in allen Punkten, in denen sie partiell differenzierbar sind):

$$f(x,y,z)=e^{xy}+\sin^2(z),\quad g(x,y,z)=\begin{pmatrix}\sqrt{x^2+y^2}-z\\ xy+\ln(1+z^2)\end{pmatrix}.$$

(ii) Sei $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ mit $x\to e^{|f(x)|^2}$ stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie Dg.

(iii) Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge der reellen $n\times n$-Matrizen. Dann ist bekanntlich $\mathbb{R}^{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n^2}$ (isomorph als Vektorräume). Wir betrachten $f:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A\to AA^\top$. Seien $A,H\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_Af(H)$.

Aufgabe 4 (Nichtdegenerierte kritische Punkte) (4 Punkte)
Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen.

(i) Sei $g\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Gelte für $x\in\Omega$, dass $Dg(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ injektiv ist. Zeigen Sie, dass dann $\varepsilon>0$ existiert, sodass $g|_{B_\varepsilon(x)}:B_\varepsilon(x)\to\mathbb{R}^m$ injektiv ist.

(ii) Ein kritischer Punkt $x\in\Omega$ der Funktion $f\in C^2(\Omega)$ heißt nichtdegeneriert, wenn die Hessematrix

$$D^2f(x)=(\partial_i\partial_jf(x))_{1\le i,j\le n}$$

invertierbar ist. Zeigen Sie, dass x dann ein isolierter kritischer Punkt ist, d.h. es gibt eine offene Umgebung $B_\varepsilon(x)$, in der keine weiteren kritischen Punkte von f liegen.

Hinweis: Wenden Sie (i) auf die Abbildung $\mathrm{grad}f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ an der Stelle x an.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)
Diskutieren Sie den Satz über notwendige Bedingungen für Extremstellen einer eindimensionalen Funktion. Bestimmen Sie alle Punkte von $f(x) = \sin(x)$ mit $x \in [0, 2\pi]$ die dafür in Frage kommen. Kann man eine äquivalente Bedingung für mehrdimensionale Funktionen formulieren? Betrachten Sie dazu die Funktion $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ für $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$.

Abgabe: Montag, 03.06.2024, 10:30 Uhr.