Abteilung für
Angewandte Mathematik

P. Dondl
P. Tscherner

03.06.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 7

Aufgabe 1 (Kritische Punkte) (4 Punkte)
Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen f. Bestimmen Sie in den nicht degenerierten Fällen den Index. Der Index bezeichnet die Anzahl der negativen Eigenwerte der Hessematrix an dem kritischen Punkt. Skizzieren Sie die Höhenlinien $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ in der Nähe der kritischen Punkte.

(i) $f(x,y) = x - x^2 - y^2$

(ii) $f(x,y) = \sin(xy)$

(iii) $f(x,y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$

Aufgabe 2 (Euler-Identität) (4 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, t > 0$ (f ist homogen vom Grad α)

(ii) $Df(x)x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Hinweis: Betrachten Sie für (ii) $\Rightarrow$ (i) die Funktion $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$.

Aufgabe 3 (Konvexe Mengen) (4 Punkte)
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $x_0, x_1 \in M$ und alle $t \in [0,1]$ gilt, dass $(1-t)x_0 + tx_1$ in M enthalten ist. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Konvexkombination von $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, falls $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ für $\lambda_i \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Zeigen Sie, dass $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn jede Konvexkombination von Punkten in M wieder in M liegt.

Aufgabe 4 (Dreieck) (4 Punkte)
Seien a, b, c die Ecken eines Dreiecks in $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die Abstandssumme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x-a|^2 + |x-b|^2 + |x-c|^2.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) Es gibt einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^2} f(y)$.

(ii) Der Punkt x ist eindeutig bestimmt. Um welchen Punkt handelt es sich?

(iii) Bestimmen Sie die Hessematrix von f.

Hinweis: Es gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)
Besprechen Sie folgenden Zusammenhang zwischen Linearer Algebra und Analysis: Aus der Linearen Algebra kennen wir die Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen. Was bedeutet das für die Hessematrizen und damit das Verhalten von Funktionen in der Nähe kritischer Punkte?

Abgabe: Montag, 10.06.2024, 10:30 Uhr.