**Abteilung für**
**Angewandte Mathematik**

P. Dondl
P. Tscherner

10.06.2024

Übung zur Vorlesung

# Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 8

---

**Aufgabe 1 (Minima, Maxima, &c.)** (4 Punkte)

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte von

$$f(x,y,z) = \frac{x^4}{2} + 2y^2 - 2xy - 2yz + z^2.$$

(ii) Gegeben seien $N$ Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$. Wir suchen die Gerade $g(x) = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$, sodass die Summe der Abstandsquadrate $y_i - g(x_i)$ minimal ist. D.h. wir wollen $F(m,n) = \sum_{i=1}^N |y_i - g(x_i)|^2$ minimieren. Bestimmen Sie $g$ derart, dass die Summe minimal wird. Begründen Sie, dass es sich dabei wirklich um ein Minimum handelt.

Hinweis: Dies ist die Methode der linearen Regression.

**Aufgabe 2 (Eine Abschätzung)** (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$, $D_0 f = 0$ und $\mathrm{Hess}_0(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Außerdem sei $\left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}(p) \right| < \frac{3}{8\sqrt{2}}$ für alle $p \in \overline{B_2(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2\}$ und $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Zeigen Sie, dass es ein $q \in \overline{B_2(0)}$ mit $f(q) < -1$ gibt.

**Aufgabe 3 (Taylorentwicklung)** (4 Punkte)
Sei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n \neq 1\}$. Bestimmen Sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Taylorentwicklung der Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1 - (x_1 + \ldots + x_n)}$$

an der Stelle 0 bis zur $k$-ten Ordnung.

**Aufgabe 4 (Stützhyperebenen)** (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in \partial M$ ein $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$ gibt, sodass

$$M \subset \{y \in \mathbb{R}^n : (\nu, y - x) \geq 0\}.$$

Man nennt dann $\{y \in \mathbb{R}^n : (\nu, y - x) = 0\}$ eine Stützhyperebene in $x \in \partial M$.

Hinweis: Wählen Sie $p_k \in \mathbb{R}^n \setminus M$ mit $p_k \to x$, und bestimmen Sie $x_k \in M$ mit $|x_k - p_k| = \inf_{y \in M} |y - p_k|$. Nach Wahl einer Teilfolge konvergiert $(x_k - p_k)/|x_k - p_k|$ gegen ein $\nu$ wie verlangt (was zu zeigen ist).

**Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)**
Wiederholen Sie die Sätze zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit unter Integralen.

**Abgabe:** Montag, 17.06.2024, 10:30 Uhr.