P. Dondl
P. Tscherner

17.06.2024

Übung zur Vorlesung

Analysis II

SoSe 2024 — Blatt 9

Aufgabe 1 (Normierte Vektorräume) (4 Punkte)
Seien $(V, ||\,.\,||_V)$ und $(W, ||\,.\,||_W)$ normierte Vektorräume.

(i) Zeigen Sie, dass für $x \in V$, $y \in W$ die Ausdrücke $\left(||x||_V^p + ||y||_W^p\right)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ bzw. $\max\{||x||_V, ||y||_W\}$ Normen auf $V \times W$ darstellen.

(ii) Zeigen Sie, dass alle obigen Normen die Boxtopologie erzeugen.

Hinweis: Die Boxtopologie ist die Topologie auf Produkträumen $V \times W$, die erzeugt wird durch Produkte offener Mengen in V und W (nach Proposition 1.1.8).

Aufgabe 2 (Integralableitung) (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) = \int_0^1 g(x,y)dx \quad \text{und} \quad f^*(y) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dx$$

wohldefiniert sind, die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, aber $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

Aufgabe 3 (Integrale mit variablen Grenzen) (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $I = [a,b]$. Die Funktion $f \in C^0(U \times I)$ sei nach $x \in U$ stetig partiell differenzierbar, also $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(U \times I)$. Beweisen Sie für differenzierbare Funktionen $\varphi, \psi : U \to (a,b)$ die Regel

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy + f(x,\psi(x))\psi'(x) - f(x,\varphi(x))\varphi'(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$\eta : U \times (a,b) \times (a,b) \to \mathbb{R}, \quad \eta(x,u,v) = \int_u^v f(x,y)dy$$

und wenden Sie (mit Begründung) die Kettenregel an.

Aufgabe 4 (Faltung) (4 Punkte)
Sei $g \in C^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, das heißt $\overline{\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}}$ ist kompakt. Überlegen Sie, dass für $f \in C^0(\mathbb{R})$ die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int f(y)g(x-y)dy$$

wohldefiniert und in $C^1(\mathbb{R})$ ist mit Ableitung $F'(x) = \int f(y)g'(x-y)dy$.

Aufgabe 5 (Anwesenheitsaufgabe)
Betrachten Sie die Taylorentwicklung im Mehrdimensionalen am Beispiel der Funktion

$$(x, y) \mapsto \exp(-x^2 - y^2).$$

Abgabe: Montag, 24.06.2024, 10:30 Uhr.