Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript der vierstündigen weiterführenden Vorlesung

Funktionalanalysis

Patrick Dondl

Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

0 Motivation

Die Funktionalanalysis bzw. lineare Funktionalanalysis besteht im wesentlichen aus Analysis bzw. linearer Algebra auf unendlich-dimensionalen Räumen. Eine typische Frage aus der linearen Algebra ist die folgende: „Seien X, Y Vektorräume und $A : X \to Y$ eine lineare, stetige Abbildung. Hat dann A eine stetige Inverse? Falls nein, wo liegt der „Defekt“?“

Beispiel. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und X, Y die Vektorräume*

$$X = \{u \in C^2(U) \cap C(\overline{U}) : u = 0 \text{ auf } \partial U\}, \ Y = C(U).$$

Wir definieren ferner die Abbildung

$$A : X \to Y, \ A(u) = -\Delta(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u.$$

A ist invertierbar genau dann, wenn das Gleichungssystem

- $-\Delta u(x) = f(x) \ \forall x \in U$,
- $u = 0$ *auf* ∂U

eine Lösung für alle $f \in Y$ besitzt. Klassisch kann man die Gleichung punktweise interpretieren. Eine andere Herangehensweise ist die folgende: wir interpretieren u als einen Punkt (bzw. Vektor) in X und $-\Delta$ als einen linearen Operator von X nach Y. Die Abbildung A ist stetig bzgl. der sup*-Norm, linear und injektiv (Übungsaufgabe); allerdings ist A nicht surjektiv. Daher ist C^2 ein schlechter Funktionenraum für den Laplace-Operator. Viel besser sind z.B. Hölder- und Sobolev-Räume.*

Die Themen dieser Vorlesung werden im wesentlichen die folgenden sein:

- Räume, Normen, Topologien,
- Lineare Operatoren und deren Eigenschaften,
- Das konkretisieren abstrakter Theorien auf Räume wie z.B. L^p.

1 Prolegomena

1.1 Grundlegende Strukturen

Die folgenden Begriffe werden als bekannt vorausgesetzt:

- Topologien mit Abschluss, Innerem, Umgebungen, Basis, Subbasis, Stetigkeit, Separabilität und Konvergenz.

- Metriken und davon induzierte Topologien, Vollständigkeit.

- Vektorräume, Normen und Skalarprodukte; insbesondere Banach- und Hilbert-Räume.

- Kompaktheit, Zusammenhang zwischen Überdeckungs- und Folgenkompaktheit, Satz von Riesz.

1.2 Einfache Beispielräume

1.2.1 Endlich-dimensionale Vektorräume

Wir betrachten die Räume $\mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Mit den l^p-Normen

$$||x||_{l^p} = ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{und} \quad ||x||_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i|$$

werden diese zu Banachräumen.

1.2.2 Folgenräume

Wir betrachten die Menge der Folgen mit Werten in $\mathbb{K}$, welche wir mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bezeichnen, und definieren darauf die l^p-Norm:

$$l^p(x) := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \text{ mit } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,$$

$$l^\infty(x) := \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

Satz 1.2.1. *Es gilt:*

(*i*) $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *ist ein metrischer Raum mit der Fréchet-Metrik*

$$d : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \varrho(x-y) \text{ wobei } \varrho(z) := \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot \frac{|z_j|}{1+|z_j|}.$$

N.b.: die Funktion d bzw. ϱ ist wohldefiniert, da $\frac{|z_j|}{1+|z_j|} \leq 1$ ist, d.h. $\varrho(z) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1$.

(*ii*) *Die Metrik d induziert eintragsweise Konvergenz auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d.h. für jede Folge von Folgen $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ gilt:*

$$x_j \xrightarrow{d} y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \iff (x_j)_i \xrightarrow{|\cdot|} y_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}$$

(*iii*) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, d)$ *ist vollständig.*

(*iv*) *Für jedes $p \in [1,\infty]$ ist*

$$l^p(\mathbb{K}) := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : ||x||_{l^p} < \infty\}$$

mit der l^p-Norm ein Banachraum.

(*v*) $(l^2, (\cdot,\cdot)_{l^2})$ *wobei*

$$(x,y)_{l^2} := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot \overline{y_j}$$

ist, ist ein Hilbertraum.

Beweis. (*i*) Übungsaufgabe.

(*ii*) Seien $x_k, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ \forall k \in \mathbb{N}$ mit $\varrho(x_k - y) \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Dann folgt mit $\varrho_0(s) := \frac{|s|}{1+|s|}$:

$$\varrho_0((x_k)_i - y_i) \leq 2^i \cdot \varrho(x_k - y) \xrightarrow{k\to\infty} 0\ \forall i \in \mathbb{N}$$
$$\implies |(x_k)_i - y_i| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \implies (x_k)_i \xrightarrow{k\to\infty} y_i\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Für die Rückrichtung gelte $(x_k)_i \xrightarrow{k\to\infty} y_i\ \forall i \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\varrho(x_k - x) &= \sum_{i=1}^{j} 2^{-i} \cdot \varrho_0((x_k)_i - x_i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \underbrace{\varrho_0((x_k)_i - x_i)}_{\leq 1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} 2^{-i} \cdot \varrho_0((x_k)_i - x_i) + 2^{-j} \\
&\xrightarrow{k\to\infty} 2^{-j} \\
&\xrightarrow{j\to\infty} 0
\end{aligned}$$

also auch $\varrho(x_k - x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

(*iii*) Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, d)$, so ist nach (*ii*) jeder Eintrag von x_k eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$. Nach Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ folgt aus (*ii*) die Behauptung.

(*iv*) Dies ist ein Spezialfall der Tatsache, dass $L^p(\mu)$ ein Banachraum ist (wobei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sei). Die Positiv-Definitheit und 1-Homogenität von $||\cdot||_{l^p}$ sind klar. Zur Dreiecksungleichung seien $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $l^p(\mathbb{K})$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $x^n = (x_1, \dots, x_n)$ und $y^n = (y_1, \dots, y_n)$. Dann gilt aber dank der Dreiecksungleichung im endlich-dimensionalen Fall:

$$|x^n + y^n|_p \leq |x^n|_p + |y^n|_p \leq ||x||_{l^p} + ||y||_{l^p} < \infty$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Dreiecksungleichung.
Zur Vollständigkeit sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $l^p(\mathbb{K})$. Dank

$$|(x_k)_i - (x_j)_i| \leq ||x_k - x_j||_{l^p}$$

sind alle Einträge $(x_k)_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$ mit Limiten y_i. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ folgt dann für hinreichend große $l \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |(x_k)_i - y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |(x_k)_i - (x_l)_i|^p \leq ||x_k - x_l||_{l^p}^p$$

also gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |(x_k)_i - y_i|^p\right)^{1/p} \leq \limsup_{l\to\infty} ||x_k - x_l||_{l^p} =: \varepsilon_k < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Eigenschaft setzt sich auch auf den Limes fort, d.h. es gilt:

$$||x_k - y||_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |(x_k)_i - y_i|^p\right)^{1/p} \overset{\substack{\text{da die Summe rechts existiert}\\ \downarrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |(x_k)_i - y_i|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon_k < \infty$$

Damit ist $x_k - y \in l^p(\mathbb{K})$ und $||x_k - y||_{l^p} \leq \varepsilon_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

(*v*) Es genügt hier, zu zeigen, dass $(\cdot,\cdot)_{l^2}$ ein Skalarprodukt ist, was klar ist.

□

1.2.3 Beschränkte Funktionen

Sei S eine Menge und Y ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Wir betrachten

$$B(S, Y) := \{f : S \to Y \mid f(S) \text{ beschränkte Teilmenge von } Y\}.$$

Satz 1.2.2. *Mit der Supremumsnorm*

$$||f||_{B(S,Y)} := \sup_{x \in S} ||f(x)||_Y$$

ist $B(S,Y)$ ein Banachraum.

Beweis. Sei also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(S,Y)$. Für jedes $x \in S$ ist dann $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y, dessen Grenzwert wir mit $f(x)$ bezeichnen (dieser existiert, da Y ein Banachraum ist). Damit gilt $\forall x \in S, k \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f_k(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_l(x) - f_k(x)| \leq \liminf_{l\to\infty} ||f_l - f_k||_{B(S,Y)} \tag{$*$}$$

Damit ist f eine beschränkte Funktion; insbesondere gilt:

$$||f||_{B(S,Y)} \leq ||f_k||_{B(S,Y)} + \liminf_{l\to\infty} ||f_l - f_k||_{B(S,Y)}.$$

Für $k \to \infty$ konvergiert die rechte Seite in $(*)$ gegen 0, und somit folgt: $f_k \xrightarrow{||\cdot||_{B(S,Y)}} f$, da die Abschätzung unabhängig von x ist. □

1.2.4 Stetige und differenzierbare Funktionen

Satz 1.2.3. *Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt und Y ein $\mathbb{K}$-Banachraum. Dann ist der Raum der stetigen Funktionen von S nach Y, $C(S,Y)$, zusammen mit der Supremumsnorm $||\cdot||_{C(S,Y)}$ ein Banachraum.*

Beweis. Die Existenz des Limes folgt wie in Satz 1.2. Ferner wissen wir, dass der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen selbst stetig ist. Dank $(*)$ aus Satz 1.2 (folgt hier analog) und der Tatsache, dass die rechte Seite für $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert, erhalten wir $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \varepsilon > \liminf_{l\to\infty} ||f_l - f_k||_{C(S,Y)} \geq \sup_{x\in S} |f(x) - f_k(x)| = ||f - f_k||_{C(S,Y)},$$

d.h. f ist der gleichmäßige Limes von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. f ist selbst stetig und damit in $C(S,Y)$. □

Bemerkung. *(i) Auf unbeschränkten Mengen oder nicht abgeschlossenen $S \subset \mathbb{R}^n$ sind stetige Funktionen nicht notwendigerweise beschränkt, womit $||\cdot||_{B(S,Y)}$ keine Norm auf diesem Raum mehr ist. Man kann stattdessen die beschränkten, stetigen Funktionen betrachten (mit gleichem Resultat wie in Satz 1.2.3). Alternativ seien $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Kompakta, sodass*

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = S$$

gilt; wir nutzen

$$d(f,g) := \varrho(f-g) \ mit\ \varrho(f) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-j} \cdot \frac{||f||_{C(K_j,Y)}}{1+||f||_{C(K_j,Y)}}$$

als Fréchet-Metrik und erhalten wieder einen vollständigen, metrischen Raum.

(*ii*) *m-mal differenzierbare Funktionen auf Kompakta im* $\mathbb{R}^n$ *bilden mit der Supremumsnorm über alle Ableitungen,*

$$||f||_{C^m(S,Y)} := \sup_{x\in S} \sum_{j=0}^{m} ||D^j f(x)||_{Y^{m^j}},$$

ebenfalls einen Banachraum.
N.b.: es gilt $D^j f(x) \in Y^{m\times\ldots\times m} \cong Y^{m^j}$.

(*iii*) *Für* C^∞ *können wir erneut eine Fréchet-Metrik benutzen:*

$$d(f,g) := \varrho(f-g) \text{ mit } \varrho(f) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \cdot \frac{||D^j f||}{1+||D^j f||}.$$

(*iv*) *Wir kennen auch die stetigen bzw. differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Der Raum dieser Funktionen ist zunächst kein Banachraum, da wir eine Cauchy-Folge von Funktionen konstruieren können, deren Träger immer weiter wächst; der Limes hätte dann keinen kompakten Träger mehr.*

1.2.5 Hölderräume

Für eine Funktion $f : S \to Y$ wie im vorhergegangenen Abschnitt (für eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$) betrachten wir die Norm

$$||f||_{C^\alpha} = \sup_{x\in S} ||f(x)||_Y + \sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \frac{||f(x)-f(y)||_Y}{|x-y|^\alpha}$$

für einen Parameter $\alpha \in (0,1]$. Der Raum

$$C^\alpha := \{f : S \to Y \mid ||f||_{C^\alpha} < \infty\}$$

heißt <u>Hölderraum</u>. Für $\alpha = 1$ ist dies die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen.

1.3 L^p-Räume (Teil 1)

1.3.1 Erinnerungen

Wir kennen die Definition von $L^1(\mu)$ für ein Maß μ, wobei wir i.d.R. als μ das Lebesgue-Maß auf einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wählen (wir schreiben dann auch $L^1(\Omega)$ oder $L^1(\Omega, \mu)$). Wichtig sind die Konvergenzsätze:

- Satz der monotonen Konvergenz (bzw. Satz von Levi)
- Satz der majorisierten/dominierten Konvergenz (bzw. Satz von Lebesgue)
- Fatou's Lemma
- Satz von Tonelli & Fubini

Wir kennen auch die Definition von $L^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty]$ und seine wichtigen Eigenschaften (z.B. die Tatsache, dass $L^p(\mu)$ ein Banachraum ist, i.e. der Satz von Fischer-Riesz). Besonders wichtig ist die Hölder-Ungleichung.

Satz 1.3.1 (Hölder-Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in L^p$ und $g \in L^q$. Dann ist $fg \in L^1$, und es gilt:*

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}$$

Beweis. Bereits in Analysis III erbracht. □

Bemerkung. *(i) Für Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ mit $f_i \in L^{p_i}$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ und*

$$\frac{1}{p} := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1$$

gilt:

$$f := \prod_{i=1}^{k} f_i \in L^p \quad \text{und} \quad ||f||_{L^p} \leq \prod_{i=1}^{k} ||f_i||_{L^{p_i}}.$$

(ii) Falls $f \in L^p \cap L^q$ für $p, q \in [1, \infty]$ ist, so ist $f \in L^r$ $\forall r \in [p, q]$, und es gilt die Interpolationsungleichung:

$$||f||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}^{\alpha} \cdot ||f||_{L^q}^{1-\alpha} \text{ wobei } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}.$$

Oft sind auch die lokalen L^p-Räume nützlich.

Definition 1.3.2. *Für $p \in [1, \infty]$ setzen wir*

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f|_K \in L^p(K) \ \forall \text{ Kompakta } K \subset \Omega\}$$

und schreiben $f_n \to f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ falls $f_n|_K \to f|_K$ in $L^p(K)$ für alle Kompakta $K \subset \Omega$ gilt.

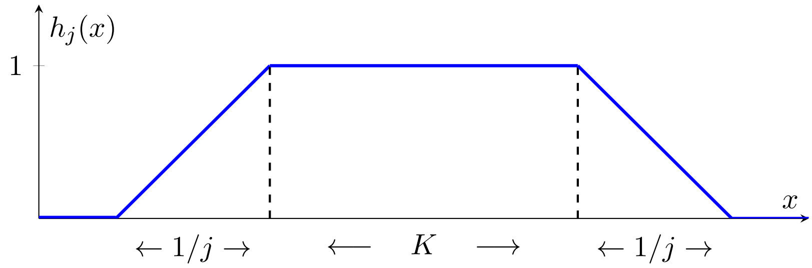
1.3.2 Dichtheit glatter Funktionen und Separabilität

Satz 1.3.3. *Der Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, $C_c(\mathbb{R}^n)$, liegt dicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Es genügt, nicht-negative Funktionen zu betrachten. Ansonsten schreiben wir $f = f^+ - f^-$ und behandeln die Teile separat. Bekannt ist, dass eine monotone Folge von nicht-negativen Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass $f_k \to f$ in L^1 gilt. Es genügt also, Treppenfunktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f = \sum_{j=1}^k \alpha_k \cdot \chi_{E_k}$ zu betrachten. Somit müssen wir sogar nur charakteristische Funktionen χ_E für eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(E) < \infty$ betrachten (denn ist $\lambda^n(E) = \infty$, so muss das zugehörige α Null sein, da sonst die Treppenfunktion nicht mehr in L^1 ist, also können wir solche Mengen ignorieren). Die Menge E können wir aber von innen durch Kompakta $K \subset E$ approximieren (nach dem Satz von Lusin), d.h. es genügt, χ_K für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Wir nutzen hierfür die Funktionen

$$h_j \in C_c(\mathbb{R}^n),\ h_j(x) = \begin{cases} 1 - j \cdot \text{dist}(x,K) & \text{dist}(x,K) < 1/j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

welche folgende Form haben:



Diese Funktionen sind stetig und haben einen kompakten Träger (da wir eine Kugel $B_r(z) \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subset B_r(z)$ finden können, d.h. $\text{supp}(h_j) \subset \overline{B_{r+1/j}(z)}$). Ferner wissen wir, dass h_j für $j \to \infty$ punktweise gegen χ_K konvergiert, denn $h_j(x) = 0$ für $j > \frac{1}{\text{dist}(x,K)}$ $\forall x \notin K$. Der Satz der majorisierten Konvergenz impliziert nun, dass auch ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $||h_{j_0} - \chi_K||_{L^1} < \varepsilon$ existiert. $\square$

Notation. *Wir nutzen folgende Hilfsfunktionen:*

$$\text{sgn} : \mathbb{C} \to B_1(0),\ \text{sgn}(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases},$$

$$T_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ T_n(z) = \mathrm{sgn}(z) \cdot \min\{|z|, n\}.$$

Satz 1.3.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt $C_c(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ für jedes $p \in [1, \infty)$.*

Beweis. Seien $f \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.
Behauptung: Es existiert eine Funktion $g \in L^\infty(\Omega)$ und ein Kompaktum $K \subset \Omega$, sodass $g(x) = 0\ \forall x \in \Omega \setminus K$ und $||g - f||_{L^p} < \varepsilon$ gilt.
Beweis der Behauptung: Sei $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Teilmengen von Ω, sodass $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = \Omega$ und $K_j \subsetneq K_{j+1}\ \forall j \in \mathbb{N}$ ist. Sei $f_n := \chi_{K_n} \cdot\ (T_n \circ f)$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ f.ü., da f f.ü. endlich sein muss, d.h. für fast alle $x \in \Omega$ erreicht f_n für hinreichend große n den Wert $f(x)$. Da f eine Majorante von f_n ist, liefert der Satz der majorisierten Konvergenz $||f_n - f||_{L^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt daher $||f_n - f||_{L^p} < \varepsilon$; per Definition ist f_n beschränkt und außerhalb von K_n Null, also folgt mit $g := f_n$ und $K := K_n$ die Behauptung. ■

Dank Satz 1.6 existiert $\forall \delta > 0$ ein $g_\delta \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$||g - g_\delta||_{L^1(\Omega)} \le ||g - g_\delta||_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \delta, \qquad (*)$$

denn setzen wir g außerhalb von K durch 0 fort, so ist $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, da $g \in L^\infty(\Omega)$, d.h.

$$\exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \le c \text{ für } \lambda\text{-fast alle } x \in K$$

$$\implies ||g||_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |g|\ \mathrm{d}\lambda = \int_K |g|\ \mathrm{d}\lambda \le \lambda(K) \cdot c < \infty.$$

Wir nutzen dieselbe Konstruktion wie im Beweis von Satz 1.6:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 1 - j \cdot \mathrm{dist}(x, K) & \mathrm{dist}(x, K) < 1/j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und setzen $\widetilde{g_j} = \phi_j \cdot g_\delta$. Folglich gilt für hinreichend große $j \in \mathbb{N}$: $\mathrm{supp}(\widetilde{g_j}) \subset \mathrm{supp}(\phi_j)$, denn nach Konstruktion existiert eine weitere kompakte Menge K' (i.e. K_{n+1} im Beweis der Existenz von g), sodass $K \subsetneq K' \subsetneq \Omega$ ist, und damit ist $\mathrm{dist}(K, \partial\Omega) > 0$. Damit wissen wir, dass (für hinreichend große $j \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\mathrm{supp}(\widetilde{g_j}) \subset \mathrm{supp}(\phi_j) \subset \Omega \text{ und } \mathrm{supp}(\widetilde{g_j}) \subset \mathrm{supp}(\phi_j) \text{ ist beschränkt} \implies \widetilde{g_j} \in C_c(\Omega).$$

Ferner gilt (da $g = 0$ und $\phi_j \le 1 \Rightarrow \widetilde{g_j} \le g_\delta$ auf $\Omega \setminus K$ und $\phi_j = 1 \Rightarrow \widetilde{g_j} = g_\delta$ auf K):

$$||g - \widetilde{g_j}||_{L^1(\Omega)} \le ||g - g_\delta||_{L^1(\Omega)} \implies g - \widetilde{g_j} \in L^1(\Omega).$$

Wir dürfen annehmen, dass $||\widetilde{g_j}||_{L^\infty(\Omega)} \le ||g||_{L^\infty(\Omega)}$ ist; ansonsten ersetzen wir $\widetilde{g_j}$ durch

$T_{||g||_{L^\infty(\Omega)}} \circ \widetilde{g_j}$, und kommen damit der Funktion g nur näher (d.h. die obige Ungleichung gilt weiterhin). Damit ist $g - \widetilde{g_j} \in L^\infty(\Omega)$. Die Interpolationsungleichung liefert:

$$\begin{aligned}
||g - \widetilde{g_j}||_{L^p(\Omega)} &\leq ||g - \widetilde{g_j}||_{L^1(\Omega)}^{1/p} \cdot ||g - \widetilde{g_j}||_{L^\infty(\Omega)}^{1-1/p} \\
&\leq ||g - g_\delta||_{L_1(\Omega)}^{1/p} \cdot (||g||_{L^\infty(\Omega)} + ||\widetilde{g_j}||_{L^\infty(\Omega)})^{1-1/p} \\
&\overset{(*)}{\leq} \delta \cdot \underbrace{(2||g||_{L^\infty(\Omega)})^{1-1/p}}_{\text{unabhängig von } \delta \text{ und } j}
\end{aligned}$$

d.h. für ein hinreichend kleines δ und hinreichend großes $j \in \mathbb{N}$ gilt $||g - \widetilde{g_j}||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. □

Bemerkung. *Diese Aussage gilt für $p = \infty$ nicht.*

Korollar 1.3.5. *Für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $p \in [1, \infty)$ ist $L^p(\Omega)$ separabel.*

Beweis. Die Funktionen in $C_c(\Omega)$ sind gleichmäßig stetig. Damit können wir sie durch endliche Stufenfunktionen auf einem Gitter approximieren; die Menge aller Stufenfunktionen auf einem Gitter mit rationalen Koeffizienten ist aber abzählbar, und liegt dicht in $C_c(\Omega)$, womit sie auch dicht in $L^p(\Omega)$ liegt. □

Bemerkung. *(i) Die Separabilität von $L^p(\mu)$ für $p \in [1, \infty)$ gilt auch für allgemeinere, separable Maße μ.*

(ii) $L^\infty((0, 1))$ ist nicht separabel. Angenommen, es gäbe eine abzählbare, dichte Teilmenge $G \subset L^\infty((0, 1))$. $\forall t, s \in (0, 1)$, $t \neq s$ gilt

$$||\chi_{(0,t)} - \chi_{(0,s)}||_{L^\infty} = 1,$$

also sind die Mengen

$$B_{1/2}(\chi_{(0,t)}) = \{f : (0, 1) \to \mathbb{R} \mid ||f - \chi_{(0,t)}||_{L^\infty((0,1))} < 1/2\}$$

für unterschiedliche $t \in (0, 1)$ disjunkt. Es muss nun in jeder solchen Menge mindestens ein Element aus G geben, und dies müssen wegen der Disjunktheit unterschiedliche Elemente sein; aber es gibt überabzählbar viele solche Mengen, also kann G dann nicht mehr abzählbar sein. ↯

Notation. *Wir schreiben im Folgenden $V \subset\subset \Omega$ für eine offene Menge $V \subset \Omega$, falls eine kompakte Menge $K \subsetneq \Omega$ mit $V \subsetneq K$ existiert.*

Definition 1.3.6. *(i) Wir definieren $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$\eta(x) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

mit einer Konstante $C > 0$, sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$

Die Funktion η heißt Standard-Glättungsfunktion.

(ii) *Für $\varepsilon > 0$ setzen wir*

$$\eta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

(iii) *Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ setzen wir*

$$f^\varepsilon(x) := (f * \eta_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) \cdot f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) \cdot f(x-y) \, \mathrm{d}y,$$

d.h.

$$f^\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) \cdot f(y) \, \mathrm{d}y = \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon(y) \cdot f(x-y) \, \mathrm{d}y.$$

Bemerkung. (i) *Es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, \mathrm{d}\lambda^n = 1 \text{ und } \operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = \overline{B_\varepsilon(0)}.$$

(ii) *Zur Integration in (iii) haben wir implizit f außerhalb von Ω durch Null fortgesetzt.*

Satz 1.3.7 (Eigenschaften der Glättung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Es gilt:*

(i) *$f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$.*

(ii) *Ist $f \in C(\Omega)$, so gilt $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ punktweise. Auf Kompakta konvergiert f^ε sogar gleichmäßig gegen f.*

(iii) *Für $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gilt $f^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, d.h. f^ε konvergiert bezüglich der Fréchet-Norm gegen f (für $\varepsilon \to 0$).*

Beweis. (i) Seien $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$, sodass $x + he_i \in \Omega$ für hinreichend kleine $h > 0$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} \cdot \left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right) \cdot f(y) \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \int_{V} \frac{1}{h} \cdot \left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right) \cdot f(y) \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

für eine kompakte Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ können wir sogar $V \subset \Omega$ annehmen, denn $x \in \Omega$, Ω ist offen, und $V \subset B_\varepsilon(x)$ (da η_ε außerhalb von

$B_\varepsilon(x)$ Null ist). Es gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{1}{h}\cdot\left(\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)\xrightarrow{h\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Diese Konvergenz ist gleichmäßig auf V, da η glatt und V kompakt ist. Damit existiert die Ableitung $\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}$ und ist gleich

$$\int_V \underbrace{\frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)}_{=\frac{1}{\varepsilon^n}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Die Funktion im Inneren ist auf V

- als Funktion von y fast überall stetig (da η_ε glatt und f auf V L^1, also fast überall stetig ist),
- als Funktion von x immer messbar (da $\frac{\partial}{\partial x_i}\eta_\varepsilon$ stetig und damit messbar ist),
- und als Funktion von x für jedes $y \in V$ L^1, da η_ε glatt und beschränkt und f L^1 ist.

Dank der Stetigkeit von parameterabhängigen Integralen folgt also, dass auch die Ableitung von f^ε stetig ist. Analog für alle höheren Ableitungen von f^ε.

(*ii*) Seien $V \subset\subset \Omega$ und $K \subsetneq V$ kompakt, sowie $\varepsilon > 0$. Nachdem f^ε auf Ω stetig ist, ist f gleichmäßig stetig auf V, also existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(y)-f(x)| < \varepsilon \;\forall x \in K,\; y \in B_\delta(x).$$

Für ein $\delta > 0$, für welches (zusätzlich zu obiger Eigenschaft)

$$\bigcup_{z\in K} B_\delta(z) \subset V$$

ist (was durch Verringerung des urspünglichen δ erreicht werden kann), erhalten wir $\forall x \in K$:

$$\begin{aligned}
|f^\delta(x)-f(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\delta(x-y)\cdot f(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\cdot\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\delta(x-y)\,\mathrm{d}y}_{=1}\right|\\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\eta_\delta(x-y)}_{\geq 0}\cdot\,(f(y)-f(x))\,\mathrm{d}y\right|\\
&\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\eta_\delta(x-y)}_{=0\text{ außerhalb von }B_\delta(x)}\cdot|f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{B_\delta(x)} \eta_\delta(x-y) \cdot \underbrace{|f(y)-f(x)|}_{\leq\varepsilon} \,\mathrm{d}y \\
&\leq \varepsilon \cdot \int_{B_{\delta(x)}} \eta_\varepsilon \,\mathrm{d}\lambda^n \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

also konvergiert f^δ für $\delta \to 0$ auf K gleichmäßig gegen f. Mit derselben Argumentation (mit dem klassischen ε-δ-Kriterium statt der gleichmäßigen Stetigkeit) folgt auch, dass f^δ für $\delta \to 0$ auf Ω punktweise gegen f konvergiert.

(iii) Seien $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ und $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$.
Behauptung: Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gilt $||f^\varepsilon||_{L^p(V)} \leq ||f||_{L^p(W)}$.
Beweis: Es gilt:

$$
\begin{aligned}
|f^\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon^{1-1/p}(x-y) \cdot \eta_\varepsilon^{1/p}(x-y) \cdot |f(y)| \,\mathrm{d}y \\
&\leq \underbrace{\left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) \,\mathrm{d}y \right|}_{=1}^{1-1/p} \cdot \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) \cdot |f(y)|^p \right|^{1/p} \\
&\quad \text{nach der Hölder-Ungleichung}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \int_V |f^\varepsilon(x)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_V \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) \cdot |f(y)|^p \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&\leq \int_W |f(y)|^p \cdot \left(\int_{B_\varepsilon(y)} \eta_\varepsilon(x-y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_W |f(y)|^p \,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

sofern $B_\varepsilon(x) \subset W \ \forall x \in V$ ist. Potenzieren beider Seiten der Gleichung mit $1/p$ liefert die Behauptung. ■

Für jedes $\delta > 0$ existiert nach Satz 1.7 ein $g \in C_c(W)$, sodass $||f - g||_{L^p(W)} < \delta$ gilt. Dann gilt (für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$):

$$
\begin{aligned}
||f^\varepsilon - f||_{L^p(V)} &\leq \underbrace{||f^\varepsilon - g^\varepsilon||_{L^p(V)}}_{=||(f-g)^\varepsilon||_{L^p(V)} \leq ||f-g||_{L^p(W)}} + ||g^\varepsilon - g||_{L^p(V)} + \underbrace{||g-f||_{L^p(V)}}_{\leq ||f-g||_{L^p(W)} \text{ da } V \subset W} \\
&\leq 2 \cdot ||f-g||_{L^p(W)} + ||g^\varepsilon - g||_{L^p(V)}
\end{aligned}
$$

$$\leq 2\delta + ||g^\varepsilon - g||_{L^p(V)}$$

aber $||g^\varepsilon - g||_{L^p(V)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$, da nach (ii) g^ε gleichmäßig gegen g konvergiert. Damit folgt die Behauptung.

□

Bemerkung. *(i) Durch vorheriges Abschneiden mit T_n wie in Satz 1.7 lässt sich auch beweisen, dass $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist (für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$).*

(ii) Für beschränkte Ω bekommen wir die übliche L^p-Norm.

2 Stetigkeit von linearen Abbildungen

Es seien $(X, ||\cdot||_X)$ und $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung.

Definition 2.0.1. *A heißt beschränkt, falls*

$$\sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y < \infty$$

ist.

Satz 2.0.2. *Es sind äquivalent:*

(i) A ist stetig in $0 \in X$,

(ii) A ist stetig,

(iii) A ist Lipschitz-stetig,

(iv) A ist beschränkt.

Beweis. „$(iv) \implies (iii)$": Seien $x_1, x_2 \in X$. Es gilt:

$$\begin{aligned} ||Ax_1 - Ax_2||_Y = ||A(x_1 - x_2)||_Y &= \left|\left| A \frac{x_1 - x_2}{||x_1 - x_2||_X} \right|\right|_Y \cdot ||x_1 - x_2||_X \\ &\leq \underbrace{\left(\sup_{||z|| \leq 1} ||Az||_Y \right)}_{=:L<\infty} \cdot ||x_1 - x_2||_X, \end{aligned}$$

also ist A Lipschitz-stetig.

Die Implikationen „$(iii) \implies (ii)$" und „$(ii) \implies (i)$" sind trivial.

„$(i) \implies (iv)$": Beweis durch Kontraposition. Sei A nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit $||x_k||_X = 1\ \forall k \in \mathbb{N}$, sodass $||Ax_k||_Y \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ gilt. Dann gilt:

$$z_k := \frac{1}{||Ax_k||_Y} \cdot x_k \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Allerdings ist $||Az_k||_Y = 1\ \forall k \in \mathbb{N}$, d.h. Az_k konvergiert nicht gegen 0, weswegen A unstetig im Punkt $0 \in X$ ist. □

Korollar 2.0.3. *Ist* $\dim X < \infty$*, so sind alle linearen Operatoren* $A : X \to Y$ *stetig.*

Beweis. Aus der Vorlesung Numerik wissen wir, dass jeder lineare Operator in einem endlich-dimensionalen Raum beschränkt ist. Satz 2.2 liefert daher die Behauptung. □

Beispiel. *Sei* $(X, ||\cdot||_X) = (C([0,1]), ||\cdot||_{L^1})$ *und* $(Y, ||\cdot||_Y) = (C([0,1]), ||\cdot||_{L^\infty})$*. Dann ist die (lineare) Identitätsabbildung* $id : X \to Y$ *nicht stetig. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Funktionen* $f_k(t) = t^k$*, denn dann gilt* $||f_k||_{L^1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$*, aber* $||f_k||_{L^\infty} \xrightarrow{k\to\infty} 1$*.*

Definition 2.0.4. *Wir definieren den Raum*

$$\mathscr{L}(X,Y) = \{A : X \to Y \mid A \text{ ist linear und stetig}\}$$

mit der Norm

$$||A||_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{||x||_X \leq 1} ||Ax||_Y \overset{\substack{\text{nach 2.2 da } A \text{ stetig ist} \\ \downarrow}}{<} \infty.$$

Falls $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *(mit der euklidischen Norm) ist, so nennen wir* $X' = \mathcal{L}(X,Y)$ *den (topologischen) Dualraum von* X*.*

Proposition 2.0.5. $(\mathscr{L}(X,Y), ||\cdot||_{\mathscr{L}(X,Y)})$ *ist ein normierter Raum, und* $\forall x \in X, A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *gilt*

$$||Ax||_Y \leq ||A||_{\mathscr{L}(X,Y)} \cdot ||x||_X.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Notation. *Sind* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *und* $B \in \mathscr{L}(Y,Z)$*, so schreiben wir* BA *für die Verkettung* $B \circ A : X \to Z$*. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass die Verkettung von linearen Abbildungen im endlich-dimensionalen Fall der Multiplikation der Darstellungsmatrizen entspricht.*

Satz 2.0.6. *Seien* X, Y, Z *normierte Räume. Ist* $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ *und* $B \in \mathscr{L}(Y,Z)$*, so ist* $BA \in \mathscr{L}(X,Z)$*, es gilt*

$$||BA||_{\mathscr{L}(X,Z)} \leq ||A||_{\mathscr{L}(X,Y)} \cdot ||B||_{\mathscr{L}(Y,Z)},$$

und $(A,B) \mapsto BA$ *ist stetig.*

Beweis. Linearität und Stetigkeit von $BA : X \to Z$ sind klar, also ist $BA \in \mathscr{L}(X, Z)$. Es gilt $\forall x \in X$ mit $||x||_X = 1$:

$$||BAx||_Z \overset{\text{Prop. 2.5}}{\leq} ||B||_{\mathscr{L}(Y,Z)}||Ax||_Y \leq ||B||_{\mathscr{L}(Y,Z)}||A||_{\mathscr{L}(X,Y)}||x||_X = ||B||_{\mathscr{L}(Y,Z)}||A||_{\mathscr{L}(X,Y)}.$$

Für die Stetigkeit von $(A, B) \mapsto BA$ rechnen wir:

$$\begin{aligned} ||B_1A_1 - B_2A_2||_{\mathscr{L}(X,Z)} &= ||B_1(A_1 - A_2) + (B_1 - B_2)A_2||_{\mathscr{L}(X,Z)} \\ &\leq ||B_1||_{\mathscr{L}(Y,Z)} \cdot ||A_1 - A_2||_{\mathscr{L}(X,Y)} \\ &\qquad + ||A_2||_{\mathscr{L}(X,Y)} \cdot ||B_1 - B_2||_{\mathscr{L}(Y,Z)} \\ &\to 0 \ \text{ für } \ ||A_1 - A_2||_{\mathscr{L}(X,Y)} \to 0 \text{ und } ||B_1 - B_2|| \to 0. \end{aligned}$$

□

Satz 2.0.7. *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $\mathscr{L}(X, Y)$ ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(X, Y)$. Dann gilt:

$$\sup_{||x||_X \leq 1} ||A_kx - A_lx||_Y = ||A_k - A_l||_{\mathscr{L}(X,Y)} \xrightarrow{k,l\to\infty} 0.$$

Für $x \in X \setminus \{0\}$ folgt dann:

$$\frac{1}{||x||_X}||A_kx - A_lx|| \xrightarrow{k,l\to\infty} 0,$$

also ist $(A_kx)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y, deren Limes wir mit Bx bezeichnen.

Für die Linearität von B rechnen wir für ein beliebiges, festes $x_2 \in X$:

$$B(\alpha x_1 + x_2) = \lim_{k\to\infty} A_k(\alpha x_1 + x_2) = \alpha \lim_{k\to\infty} A_kx_1 + \lim_{k\to\infty} A_kx_2 = \alpha Bx_1 + Bx_2 \xrightarrow{\alpha\to 0} Bx_2,$$

also ist B stetig in x_2. Da x_2 beliebig gewählt werden kann, ist B insgesamt stetig.

Für die Stetigkeit von B rechnen wir:

$$||Ax||_Y = ||\lim_{k\to\infty} A_kx||_Y \overset{||\cdot||_Y \text{ stetig}}{=} \lim_{k\to\infty} ||A_kx|| \leq \limsup_{k\to\infty} ||A_k||_{\mathscr{L}(X,Y)} \cdot ||x||_X \leq L \cdot ||x||_X.$$

Dabei existiert die Konstante $L \in \mathbb{R}$, da $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(X, Y)$ ist, also ist $(||A_k||_{\mathscr{L}(X,Y)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, und damit beschränkt. Nach Satz 2.2 ist B damit stetig.

Nun zeigen wir noch, dass $||A_k - A||_{L(X,Y)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ gilt. Dafür rechnen wir:

$$||Ax - A_k x||_Y = ||\lim_{l\to\infty} A_l x - A_k x||_Y \leq \limsup_{l\to\infty} ||A_l - A_k||_{\mathscr{L}(X,Y)} \cdot ||x||_X.$$

Da $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathscr{L}(X,Y)$ ist, konvergiert die rechte Seite für $k\to\infty$ gegen Null. $\square$

Bemerkung. *Die Vollständigkeit von X wird hierfür nicht benötigt.*

3 Der Satz von Hahn-Banach

3.1 Analytische Formulierung des Satzes von Hahn-Banach

Wir stellen uns die Frage, ob der Dualraum X' hinreichend „reichhaltig" ist, z.B., ob für $x \neq y$ ein $f \in X'$ mit $f(x) \neq f(y)$ existiert. In endlich-dimensionalen Vektorräumen X ist dies trivial, da wir einfach die Gerade zwischen x und y betrachten ($tx + (1-t)y$ für $t \in \mathbb{R}$), und in eine lineare Funktion umwandeln. In unendlich-dimensionalen Fall ist dies allerdings nicht-trivial.

Satz 3.1.1 (Hahn-Banach)**.** *Sei X ein reeller Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall \lambda > 0,\ x \in X,$

(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in X.$

Weiter sei $G \subset X$ ein Untervektorraum und $g : G \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, sodass $g(x) \leq p(x)\ \forall x \in G$. Dann existiert eine lineare Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, sodass

(i) $f|_G = g$ *d.h.* $f(x) = g(x)\ \forall x \in G,$

(ii) $f(x) \leq p(x)\ \forall x \in X.$

Eine solche Abbildung f heißt dann Fortsetzung von g auf X.

Bemerkung. *(i) Dieser Satz beantwortet sofort die Frage in der Einleitung von Abschnitt 3. Wir können den Untervektorraum G als den ein-dimensionalen Raum wählen, der x und y enthält. Darauf lässt sich leicht eine lineare Abbildung nach X definieren, die die Eigenschaften (a) und (b) erfüllt, beschränkt (und damit stetig) ist, und $g(x) \neq g(y)$ erfüllt. Dann liefert der Satz von Hahn-Banach aber eine lineare Abbildung f mit $f(x) \neq f(y)$, die zudem stetig ist, da sie ebenfalls beschränkt ist.*

(ii) Jede Norm auf X erfüllt die für p notwendigen Eigenschaften.

Beispiel. (*i*) *Wir betrachten*

$$X = L^\infty((0,1)) \text{ und } G = C((0,1)) \cap B((0,1))$$

(wobei $B(\Omega)$ *die auf* Ω *beschränkten Funktionen bezeichne). Wir wählen* $g(x) = x(1/2)$ *und* $p(x) = ||x||_{L^\infty}$*. Dann gilt* $g(x) \leq p(x)$*, also liefert der Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung von* g *auf* $C^\infty((0,1))$*.*

(*ii*) *Wir betrachten*

$$X = l^\infty \text{ und } c_0 = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}, x_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\}.$$

Dann gilt einerseits $c_0 \subsetneq l^\infty$*, da jede konvergente Folge beschränkt ist, aber nicht jede beschränkte Folge konvergiert, und* $\overline{c_0}^{l^\infty} = c_0$*, d.h.* c_0 *ist ein abgeschlossener, echter Untervektorraum von* l^∞*. Andererseits gilt* $c_0' \cong l^1$ *in dem Sinne, dass ein Isomorphismus* $\phi : l^1 \to c_0'$ *mit*

$$\phi(y)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j$$

existiert. Wir stellen uns nun die Frage, ob ein $f \in (l^\infty)'$ *existiert, das nicht durch* $y \in l^1$ *dargestellt werden kann. Diese Frage wird (eventuell) später beantwortet.*

Definition 3.1.2. (*i*) *Eine Menge* P *mit einer Relation* $\preccurlyeq$ *heißt halbgeordnet, falls* $\forall a, b, c \in P$ *gilt:*

- *(a) Reflexivität:* $a \preccurlyeq a$,
- *(b) Transitivität:* $a \preccurlyeq b$ *und* $b \preccurlyeq c \implies a \preccurlyeq c$,
- *(c) Antisymmetrie:* $a \preccurlyeq b$ *und* $b \preccurlyeq a \implies a = b$.

(*ii*) $(Q, \preccurlyeq)$ *heißt total geordnet, wenn es eine Halbordnung ist, und* $\forall a, b \in Q$ $a \preccurlyeq b$ *oder* $b \preccurlyeq a$ *gilt.*

(*iii*) *Sei* P *halbgeordnet und* $R \subset P$*. Ein Element* $c \in P$ *heißt obere Schranke von* R*, falls* $a \preccurlyeq c$ $\forall a \in R$ *gilt.*

(*iv*) *Ein Element* $m \in P$ *heißt maximal, falls* $\forall a \in P$ *mit* $m \preccurlyeq a$ *auch sofort* $a = m$ *gilt.*

Lemma (Zorn'sches Lemma)**.** *Sei* $(P, \preccurlyeq)$ *nicht leer und halb geordnet, sodass jede total geordnete Teilmenge von* P *eine obere Schranke in* P *besitzt. Dann besitzt* P *ein maximales Element.*

Bemerkung. *Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom. Der Beweis ist Übungsaufgabe.*

Wir erbringen nun den Beweis des Satzes von Hahn-Banach.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned}P := \{h : D(h) \to \mathbb{R} \mid G \subset D(h), D(h) &\text{ ist ein Untervektorraum von } X,\\ h \text{ ist eine Fortsetzung von } g &\text{ auf } D(h) \text{ mit } h(x) \leq p(x)\ \forall x \in D(h)\}.\end{aligned}$$

Auf dieser Menge definieren wir die Relation

$$h_1 \preccurlyeq h_2 :\iff D(h_1) \subset D(h_2) \text{ und } h_1 = h_2|_{D(h_1)}.$$

- P ist nicht leer, denn $g \in P$.
- *Behauptung:* „$\preccurlyeq$" ist eine Halbordnung auf P.
  Beweis:
  - (i) $h \preccurlyeq h$ ist offensichtlich.
  - (ii) Sei $h_1 \preccurlyeq h_2$ und $h_2 \preccurlyeq h_3$. Dann ist $D(h_1) \subset D(h_2) \subset D(h_3)$ und $h_3|_{D(h_1)} = h_3|_{D(h_2) \cap D(h_1)} = h_2|_{D(h_1)} = h_1$, also $h_1 \preccurlyeq h_3$.
  - (iii) Ist $h_1 \preccurlyeq h_2$ und $h_2 \preccurlyeq h_1$, so ist $D(h_1) = D(h_2)$ und $h_1 = h_2$. ■
- *Behauptung:* Jede total geordnete Teilmenge von P besitzt eine obere Schranke in P.
  Beweis: Sei $Q := \{h_i\}_{i \in I}$ eine total geordnete Teilmenge von P. Wir setzen

  $$D(h) := \bigcup_{j \in I} D(h_i) \text{ und } h(x) := h_j(x) \text{ für ein beliebiges } j \text{ mit } x \in D(h_j).$$

  Die Funktion h ist wohldefiniert, denn Q ist total geordnet; wäre also $x \in D(h_i)$ und $x \in D(h_j)$, so müsste $h_i \preccurlyeq h_j$ oder $h_j \preccurlyeq h_i$ sein, also würden h_i und h_j auf $D(h_i) \cap D(h_j) \supset \{x\}$ übereinstimmen.
  Wir wollen nun zeigen, dass $h \in P$ ist.
  - (i) $D(h)$ ist ein Untervektorraum von X, da für $x, y \in D(h)$ ein $j \in I$ mit $x, y \in D(h_j)$ existiert (es existiert für x ein j_1 und für y ein möglicherweise anderes j_2; da Q total geordnet ist, existiert aber eines von beiden, sodass $D(h_{j_{1-i}}) \subset D(h_{j_i})$ ist, womit $x, y \in D_{j_i}$ ist). Damit ist aber $(\alpha x + y) \in D(h)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
  - (ii) $h(x) \leq p(x)$ ist klar, da $\forall x \in D(h)$ ein $j \in I$ mit $x \in D(h_j)$ und damit $h(x) = h_j(x) \leq p(x)$ existiert.

(iii) Analog folgt $h(x) = g(x)\ \forall x \in G$.

(iv) Sei $h_j \in Q$ beliebig. Dann gilt $D(h_j) \subset D(h)$, also folgt mit (i)-(iii) $h \preccurlyeq h_j$.

Damit ist h eine obere Schranke von Q in P. ■

- Nach dem Zorn'schen Lemma existiert ein maximales Element $f \in P$.
  Behauptung: f ist die gesuchte Fortsetzung von g.
  Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass $D(f) = X$ ist. Zum Widerspruchsbeweis sei $x_0 \in X \setminus D(f)$. Wir setzen

$$D(\widetilde{f}) = D(f) + \operatorname{span}(\{x_0\}).$$

Dann gilt $\forall x \in D(f)$:

$$\widetilde{x} = x + tx_0 \in D(\widetilde{f})\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = f(x) + \alpha t$$

für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\widetilde{f} \in P$ ist. Solch ein α existiert, denn es bleibt für $\widetilde{f} \in P$ nur noch zu zeigen, dass $\widetilde{f} \leq p$ ist, und dies ist äquivalent zu

$$\forall x \in D(f), t \in \mathbb{R} : f(x) + \alpha t \leq p(x + tx_0)$$

$$\iff \forall x \in D(f) : \begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) & \forall t \geq 0 \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - \alpha \leq p\left(\frac{x}{t} - x_0\right) & \forall t < 0 \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in D(f) : \begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) \end{cases} .$$

Allerdings gilt $\forall x, y \in D(f)$ nach Sublinearität von p:

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

$$\implies f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x).$$

Diese Ungleichung bleibt bestehen, wenn wir auf beiden Seiten sowohl das Supremum über x als auch über y nehmen:

$$\sup_{y \in D(f)} f(y) - p(y - x_0) \leq \sup_{x \in D(f)} p(x + x_0) - f(x).$$

Jedes α zwischen linker und rechter Seite erfüllt nun die Voraussetzung. Damit ist $\widetilde{f} \in P$, im Widerspruch zur Maximalität von f. ■

Damit ist f die gesuchte Fortsetzung. $\square$

Der Satz von Hahn-Banach kann für komplexe Vektorräume verallgemeinert werden. Hierzu verwenden wir, dass jeder Vektorraum über $\mathbb{C}$ auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ interpretiert werden kann – man schränkt die Skalarmultiplikation dazu einfach auf Skalare in $\mathbb{R}$ ein. Diesen Raum bezeichnen wir gegebenenfalls als $X_{\mathbb{R}}$, wenn X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Vektorraumaxiome weiter gelten. Eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum X ist dann eine lineare Funktion $X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$. Wir bemerken, dass für $f\colon X \to \mathbb{C}$, f ($\mathbb{C}$)-linear, die Funktion $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion auf X ist.

Satz 3.1.3. *Sei X ein komplexer Vektorraum und $p : X \to \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung, d.h.*

$$p(ax + by) \leq |a| \cdot p(x) + |b| \cdot p(y) \ \forall x, y \in X, a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| + |b| \leq 1.$$

Sei G ein Untervektorraum von X und $g : G \to \mathbb{C}$ eine ($\mathbb{C}$)-lineare Funktion mit $|g| \leq p$. Dann existiert eine ($\mathbb{C}$)-lineare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f|_G = g$ und $|f| \leq p$.

Beweis. Sei $h := \mathrm{Re}(g)$. Dann ist $h \leq |g| \leq p$, und h ist $\mathbb{R}$-linear. Somit existiert nach dem Satz von Hahn-Banach eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion $H : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $H \leq p$. Setzen wir $f(x) = H(x) - iH(ix)$, so ist diese Funktion (nach dem nachfolgenden Lemma) $\mathbb{C}$-linear, und ist eine Fortsetzung von g, denn es gilt:

$$f(x) = e^{i\theta}|f(x)| \implies |f(x)| = e^{-i\theta}f(x) = f(e^{-i\theta}x) = H(e^{-i\theta}x) \leq p(x)$$

$\square$

Lemma 3.1.4. *Sei X ein komplexer Vektorraum und $H : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear. Dann ist $f(x) := H(x) - iH(ix)$ $\mathbb{C}$-linear.*

Beweis. Offensichtlich gilt $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Es gilt:

$$f(ix) = H(ix) - iH(-x) = H(ix) + iH(x) = if(x).$$

Nun seien $z = a + bi \in \mathbb{C}$ und $x \in X$ beliebig. Dann gilt dank der $\mathbb{R}$-Linearität von H (und damit von f):

$$f(zx) = f(ax) + f(ibx) = f(ax) + if(bx) = af(x) + ibf(x) = (a + ib)f(x) = zf(x).$$

$\square$

Korollar 3.1.5. *Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

(i) $\forall x \in X \ \exists f \in X'$ *mit* $f(x) = ||x||$ *und* $||f||_{G'} = 1$.

(ii) *Für alle linearen Abbildungen $f : G \to \mathbb{C}$ gilt:*

$$||f||_{G'} = \sup_{\substack{||x|| \leq 1 \\ x \in G}} |f(x)| < \infty.$$

(iii) *$\forall x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $f \in X'$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

(iv) *Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit $Y \neq X$. Dann existiert für alle $x_0 \in X \setminus Y$ ein $f \in X'$ mit $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.*

Beweis. *(i)* Sei $G := \operatorname{span}\{x\}$, $p(x) = ||x||$ und $g : G \to \mathbb{K}$, $g(\lambda x) := \lambda ||x||$. Dann gilt

$$|g(\lambda x)| \leq |\lambda| \cdot ||x|| =: p(\lambda x),$$

also können wir den Satz von Hahn-Banach (in der komplexen Version) anwenden, und erhalten eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, für die $f|_G(\lambda x) = \lambda ||x||$ und $|f(x)| \leq ||x||$ gilt; es folgt

$$||f|| = \sup_{||x||_X \leq 1} |f(x)| \leq 1.$$

Andererseits ist aber $f(x) = ||x||$, also $f(x/||x||) = 1$, d.h. $||f|| = 1$.

(ii) Mit $p(x) = ||f||_{G'} \cdot ||x||$ gilt $|f(x)| \leq p(x)$, also existiert eine Funktion $F \in X'$, sodass $|F(x)| \leq ||f||_{G'} \cdot ||x||$ ist, also $||F||_{X'} \leq ||f||_{G'}$ (wegen $X \supset G$).

(iii) Sei o.B.d.A. $y \neq 0$. Nach *(i)* existiert ein $f \in X'$ mit $f(x - y) = ||x - y|| \neq 0$. Da aber f linear ist, folgt $f(x) \neq f(y)$.

(iv) Übungsaufgabe.

□

3.2 Trennung von konvexen Mengen

Definition 3.2.1. *Eine (reelle) Hyperebene ist eine Menge $H \subset X$, sodass ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine lineare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existieren, sodass $H = [f = \alpha]$ ist.*

Proposition 3.2.2. *Eine Hyperebene $H = \{f = \alpha\}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn f stetig ist.*

Definition 3.2.3. *Wir sagen, dass eine lineare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ zwei Mengen $A, B \subset X$ trennt, wenn ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt:*

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{x \in B} f(x).$$

f trennt A und B strikt, wenn gilt:

$$\sup_{x \in A} < \alpha < \inf_{x \in B} f(x).$$

Wir stellen uns nun die Frage, ob konvexe Mengen A, B immer getrennt werden können. Dies wollen wir durch den folgenden Satz beantworten.

Satz 3.2.4 (Trennungssatz)**.** *Es ist immer möglich,*

(i) einen einzelnen Punkt von einer offenen, konvexen Menge zu trennen,

(ii) zwei offene, konvexe, disjunkte Mengen trennen,

(iii) und eine abgeschlossene, konvexe Menge strikt von einer kompakten, konvexen Menge zu trennen.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir einige Vorarbeit.

Lemma 3.2.5 (Minkowski-Funktional)**.** *Sei $C \subset X$ offen und konvex mit $0 \in C$. Wir definieren $\forall x \in X$:*

$$p(x) := \inf\{\alpha > 0 \mid \alpha^{-1} \cdot x \in C\}.$$

Diese Funktion ist positiv homogen vom Grad 1 und sublinear bzgl. Vektoraddition. Ferner gilt:

(i) $\exists M > 0$: $0 \leq p(x) \leq M \cdot ||x|| \; \forall x \in X$,

(ii) $C = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$.

p wird Minkowski-Funktional oder Gauge genannt.

Beweis. Diese positive Homogenität folgt sofort aus der Definition von p. Für die Sublinearität sehen wir, dass $\forall x, y \in X$ und $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

$$\frac{x}{p(x) + \varepsilon} \in C, \; \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C$$

$$\Longrightarrow \; \frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \varepsilon} \in C \; \forall t \in [0, 1].$$

Da es ein $t \in [0, 1]$ mit

$$\frac{tx}{p(x) + \varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y) + \varepsilon} = \frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}$$

gibt (Übungsaufgabe), folgt

$$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \in C.$$

Mit (ii) folgt daraus

$$p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) < 1,$$

also erhalten wir mit der positiven Homogenität von p:

$$p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} p(x)+p(y).$$

(i) Da $0 \in C$ ist und C offen ist, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset C$. Folglich ist $0 \leq p(x) \leq \frac{1}{r} \cdot ||x|| \ \forall x \in X$.

(ii) Sei $x \in C$ beliebig. Da C offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(1+\varepsilon)x \in C$, also:

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Sei andererseits $p(x) < 1$ für ein $x \in X$. Dann existiert ein $\alpha < 1$ mit $\alpha^{-1}x \in C$; die Konvexität von C und $0 \in C$ impliziert daher aber

$$x = \alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot x + (1-\alpha) \cdot 0 \in C.$$

□

Nun wollen wir Satz 4.4 beweisen.

Beweis. (i) Sei $C \subset X$ offen, nicht-leer und konvex. Sei $x_0 \in X \setminus C$. Wir wollen zeigen, dass ein $f \in X'$ mit $f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in C$ existiert. Wir nehmen dafür o.B.d.A. an, dass $0 \in C$ ist. Wir verwenden das Minkowski-Funktional p von C, den Untervektorraum $G := \mathbb{R}x_0 = \operatorname{span}\{x\}$ und die Funktion $g(tx_0) = t$. Dann gilt $g \leq p$, also existiert nach dem Satz von Hahn-Banach eine Funktion $f \in X'$ mit $f(x_0) = 1$ und $f(x) < 1 \ \forall x \in C$.

(ii) Seien A, B offen, konvex und disjunkt. Dann ist

$$C := A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

konvex, und $0 \notin C$. Nach (i) können wir 0 von C trennen, womit (durch Umstellen) auch A von B getrennt wird.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Seien

$$A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0) = \{a + b \mid a \in A, b \in B_\varepsilon(0)\},\ B_\varepsilon := B + B_\varepsilon(0),$$

i.e. Vergrößerungen von A bzw. B um ε.
Behauptung: Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gilt $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \varnothing$.

Beweis: Angenommen, die Behauptung stimmt nicht. Dann existiert eine Folge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$ existiert. Dann existieren aber $x_n \in A, y_n \in B$ sodass

$$||x_n - y_n|| \leq ||x_n - z_n|| + ||z_n - y_n|| \leq 2\varepsilon_n$$

ist (per Definition von A_ε und B_ε). Da B kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y \in B$. Allerdings gilt

$$||x_{n_k} - y|| \leq ||x_{n_k} - y_{n_k}|| + ||y_{n_k} - y|| \leq 2\varepsilon_{n_k} + ||y_{n_k} - y|| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

also $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y$, also $y \in \overline{A} = A$. Dies ist ein Widerspruch zu $A \cap B = \varnothing$. ■

Sei also ε so klein, dass $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \varnothing$ ist. Da die Mengen $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ offen sind, existiert nach (ii) eine Hyperebene $[f = \alpha]$, die A_ε und B_ε trennt. Folglich gilt:

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \quad \forall x \in A, y \in B, z \in B_1(0)$$

$$\implies f(x) + \underbrace{\varepsilon||f||}_{>0} \leq \alpha \leq f(y) - \underbrace{\varepsilon||f||}_{>0} \implies f(x) < \alpha < f(y).$$

□

Bemerkung. (i) *Die typische Anwendung folgt mit $B = \{x_0\}$ für ein $x_0 \in X$ (diese Mengen sind konvex und kompakt).*

(ii) *Seien $A, B \subset X$ nicht leer, disjunkt und konvex. Ohne weitere Annahmen ist eine Trennung solcher Mengen nur im endlichdimensionalen Fall möglich.*

(iii) *Mit dem folgenden Lemma können wir auch den komplexen Fall behandeln, indem wir eine reelle, abgeschlossene Hyperebene $[\operatorname{Re} f = \alpha]$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten.*

Lemma 3.2.6. *Sei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$, $A \subsetneq X$ konvex, nicht leer und offen, sowie $x_0 \in X \setminus A$. Dann existiert ein $f \in X'$ mit*

$$\operatorname{Re} f(x) \leq \operatorname{Re} f(x_0) \ \forall x \in A.$$

Eine Folgerung aus den Trennungssätzen (reel oder komplex) ist das folgende Ergebnis.

Korollar 3.2.7. *Sei $F \subset X$ ein Untervektorraum mit $\overline{F} \neq X$. Dann existiert ein Funktional $f \in X' \setminus \{0\}$ mit $f(x) = 0$ $\forall x \in F$.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$, $x_0 \notin \overline{F}$. Wenden wir den Trennungssatz auf $A = \overline{F}$ und $B = \{x_0\}$ an,so erhalten wir ein $f \in X' \setminus \{0\}$, sodass die Hyperebene $[\operatorname{Re} f = \alpha]$ $\overline{F}$ und $\{x_0\}$ strikt trennt, d.h. es gilt:

$$\operatorname{Re} f(x) < \alpha < \operatorname{Re} f(x_0) \ \forall x \in F.$$

Nachdem F aber ein Untervektorraum ist, folgt

$$\operatorname{Re} f(\lambda x) = \lambda \cdot \operatorname{Re} f(x) < \alpha \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in F;$$

wäre also $f(x) \neq 0$ für ein $x \in F$, so würde dies mit $\lambda = \frac{\alpha}{f(x)}$ auf einen Widerspruch führen; folglich muss f auf F Null sein. □

Bemerkung. *Dies ist sehr nützlich, um Dichtheit von Unterverktorräumen zu zeigen: wenn $\forall f \in X'$ die Implikation*

$$\forall x \in F : f(x) = 0 \implies f \equiv 0$$

gilt, so folgt aus dem obigen Korrolar durch Kontraposition, dass $\overline{F} = X$ ist, i.e. dass F dicht in X liegt.

4 Das Baire'sche Kategorienargument

4.1 Fette und magere Mengen

Bemerkung.

(i) *Eine Menge F heißt nirgends dicht, wenn $(\overline{F})^\circ = \varnothing$ ist.*

(ii) *Eine Menge M heißt mager (oder Menge der Kategorie 1), wenn nirgends dichte Mengen F_n für $n \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ ist.*

(iii) *Nicht-magere Mengen heißt fett (oder Menge der Kategorie 2).*

(iv) *Insbesondere ist jeder vollständige, metrische Raum fett (dies folgt aus dem anschließenden Lemma).*

(v) *Betrachte den metrischen Raum $X = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ und $F_n = \{q_n\}$, wobei q_n eine Abzählung der rationalen Zahlen sei. Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$\overline{F_n} = F_n = \{q_n\} \text{ und } \left(\overline{F_n}\right)^\circ = \varnothing,$$

aber

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathbb{Q} \implies \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^\circ = \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{Q} \neq \varnothing$$

Lemma 4.1.1 (Baire)**.** *Sei X ein vollständiger, metrischer Raum, und sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine*

Folge abgeschlossener Teilmengen von X. Falls $F_n^\circ = \varnothing \ \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)^\circ = \varnothing.$$

Beweis. Sei $O_n := F_n^c \ \forall n \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind offen und dicht in X, denn $\overline{O_n} = \overline{F_n^c} = (F_n^\circ)^c = X$. Wir wollen zeigen, dass $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ist immer noch dicht in X. Sei also $\omega \subset X$ offen und nicht leer. Wir werden zeigen, dass $\omega \cap G \neq \varnothing$ ist (womit G dicht in X liegt). Seien $x_0 \in \omega$ und $r_0 > 0$, sodass $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset \omega$ ist. Dann seien $x_1 \in B_{r_0}(x_0) \cap O_1$ (existiert, da O_1 dicht ist) und $r_1 > 0$, sodass

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset B_{r_0}(x_0) \cap O_1 \text{ und } r_1 < \frac{r_0}{2}$$

ist. Dies setzen wir induktiv fort, und konstruieren so Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$, sodass $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset B_{r_n}(x_n) \cap O_{n+1} \text{ und } r_{n+1} < \frac{r_n}{2} < 2^{-n} \cdot r_0.$$

Damit gilt $\forall m, k \in \mathbb{N}$:

$$d(x_m, x_k) < r_{\min\{m,k\}-1} \xrightarrow{m,k\to\infty} 0,$$

also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, welche (nach Vollständigkeit von X) einen Grenzwert $x \in X$ hat. Es folgt:

$$x \in \overline{B_{r_n}(x_n)} \subset O_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N} \implies x \in \omega \cap G.$$

□

Der Satz von Banach-Steinhaus

Satz 4.1.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Seien X, Y normierte Vektorräume, wobei X ein Banachraum sei. Sei $(T_i)_{i\in I}$ eine (nicht notwendigerweise abzählbare) Familie beschränkter, linearer Abbildungen von X nach Y. Falls*

$$\sup_{i\in I} ||T_i x|| < \infty \ \forall x \in X$$

ist, so gilt auch

$$\sup_{i\in I} ||T_i|| < \infty.$$

Beweis. Sei $X_n := \{x \in X \mid \forall i \in I : ||T_i x|| \leq n\}$. Damit ist X_n abgeschlossen, und da nach Voraussetzung punktweise Schranken existieren, gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Nach Lemma 5.1 existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $X_{n_0}^\circ \neq \varnothing$ ist (ansonsten wäre nach Lemma 5.1 $\varnothing = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)^\circ = X^\circ = X$ ↯). Seien also $x_0 \in X_{n_0}$ und $r > 0$ sodass $B_r(x_0) \subset X_{n_0}$ ist. Damit gilt aber

$$||T_i(x_0 + rz)|| \leq n_0 \ \forall i \in I, z \in B_1(0),$$

also dank Linearität und der umgekehrten Dreiecksungleichung $\forall i \in I, z \in B_1(0)$:

$$n_0 \geq ||T_i(x_0 + rz)|| = || - rT_iz - T_ix_0|| \geq \big| ||rT_iz|| - ||T_ix_0|| \big| = \big| r \cdot ||T_iz|| - ||T_ix_0|| \big|$$

$$\implies r \cdot ||T_iz|| \leq n_0 + ||T_ix_0|| \ \forall i \in I, z \in B_1(0)$$

$$\implies ||T_i|| = \sup_{z\in B_1(0)} ||T_iz|| \leq \frac{n_0 + ||T_ix_0||}{r} \quad \forall i \in I.$$

Da wir wissen, dass $\sup_{i\in I} ||T_ix_0|| < \infty$ ist, ist die rechte Seite durch eine Konstante beschränkt, also folgt die Behauptung. □

Bemerkung. *Dieser Satz wird auch* <u>*uniform boundedness principle*</u> *genannt, da wir aus punktweisen Schranken ein globales Ergebnis folgern.*

Korollar 4.1.2. *Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Vektorraum, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter, linearer Abbildungen $T_n : X \to Y$, sodass*

$$T_n x \xrightarrow{n\to\infty} y =: Tx \ \forall x \in X$$

gilt. Dann gilt:

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$

(ii) $T \in \mathscr{L}(X, Y)$

(iii) $||T|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||T_n||$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Korollar 4.1.3. *Sei Z ein Banachraum und $B \subset Z$. Falls $\forall f \in Z'$ die Menge $f(B)$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist, so ist B in Z beschränkt.*

Beweis. Wir nutzen den Satz von Banach-Steinhaus mit $X = Z'$, $Y = \mathbb{K}$, $I = B$, und $T_b(f) := f(b) \ \forall f \in Z', b \in B$. Nach Annahme haben wir

$$\sup_{b\in B} |T_b(f)| = \sup_{b\in B} |f(b)| < \infty \ \forall f \in Z'.$$

Der Satz von Banach-Steinhaus liefert daher ein $C > 0$, sodass

$$|f(b)| \leq C \cdot ||f|| \; \forall f \in Z', b \in B.$$

Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert zu jedem $b \in B$ ein $f \in X'$ mit $f(b) = ||b||$ und $||f|| = 1$, also folgt $||b|| \leq C \; \forall b \in B$. □

Korollar 4.1.4. *Seien Z ein Banachraum, $B' \subset Z'$ und die Mengen*

$$\bigcup_{f \in B'} f(x)$$

seien für alle $x \in Z$ beschränkt (in $\mathbb{K}$). Dann ist B' beschränkt (in Z').

Beweis. Wir wenden analog zum Beweis des vorherigen Korollars den Satz von Banach-Steinhaus auf $X = Z$, $Y = \mathbb{K}$ und $I = B'$ an. □

4.2 Satz über die offene Abbildung und Satz von abgeschlossenen Graphen

Satz 4.2.1 (über die offene Abbildung)**.** *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ beschränkt, linear und surjektiv. Dann existiert ein $c > 0$, sodass*

$$T(\underbrace{B_1(0)}_{in\ X}) \supset \underbrace{B_c(0)}_{in\ Y}$$

gilt.

Beweis. Behauptung 1: Für jede surjektive, lineare Abbildung $T : X \to Y$ existiert ein $c > 0$ mit

$$\overline{T(B_1(0))} \supset B_{2c}(0). \qquad (*)$$

Beweis: Sei $Y_n := \overline{T(B_n(0))}$. Dank Surjektivität von T gilt $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$. Nach dem Bair'schen Kategorienargument existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $Y_{n_0}^\circ \neq \varnothing$ ist. Allerdings gilt

$$B_{n_0}(0) = \{x \in X \mid \frac{1}{n_0} x \in B_1(0)\},$$

d.h. dank der Linearität von T gilt

$$Y_{n_0} = \overline{T(B_{n_0}(0))} = \{y \in Y \mid \frac{1}{n_0} y \in \overline{T(B_1(0))}\},$$

also ist auch

$$\left(\overline{T(B_1(0))}\right)^\circ \neq \varnothing.$$

Nun sei $c > 0$ und $y_0 \in Y$, sodass $B_{4c}(y_0) \subset \overline{T(B_1(0))}$ ist. Dank Linearität von T ist aber $\forall y \in \overline{T(B_1(0))}$ auch $-y \in \overline{T(B_1(0))}$, also folgt

$$B_{4c}(0) \subset B_{4c}(y_0) + B_{4c}(-y_0) \subset \overline{T(B_1(0))} + \overline{T(B_1(0))} = 2 \cdot \overline{T(B_1(0))}$$

$$\implies B_{2c}(0) \subset \overline{T(B_1(0))}.$$

■

Behauptung 2: Angenommen, T erfüllt $(*)$; dann gilt $T(B_1(0)) \supset B_c(0)$.
Beweis: Sei $y \in Y$ mit $||y|| < c$. Wir müssen nun ein $x \in X$ mit $||x|| < 1$ finden, sodass $Tx = y$ ist. Dank $(*)$ wissen wir, dass $\forall \varepsilon > 0$ ein $z_1 \in X$ mit $||z_1|| < \frac{1}{2}$ und $||y - Tz_1|| < \varepsilon$ existiert. Mit $\varepsilon = \frac{c}{2}$ existiert ein $z_1 \in X$, sodass $||z_1|| < \frac{1}{2}$ und $||y - Tz_1|| < \frac{c}{2}$ ist, also $y - Tz_1 \in B_{\frac{c}{2}}(0) \subset Y$. Wir finden also auch ein $z_2 \in X$ mit $||z_2|| < \frac{1}{4}$ und $||(y - Tz_1) - Tz_2|| < \frac{c}{4}$. Wir konstruieren so eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$||z_n|| < \frac{1}{2^n} \text{ und } \left|\left|y - T\left(\sum_{k=1}^{n} z_n\right)\right|\right| < \frac{c}{2^n} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass $x_n := \sum_{i=1}^{n} z_k$ eine Cauchy-Folge in X ist. Diese konvergiert (nach Vollständigkeit von X) gegen ein $x \in X$. Nach Dreiecksungleichung gilt

$$||x|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||z_k|| = 1,$$

und nach Stetigkeit von T und $||\cdot||$

$$||y - Tx|| = ||y - T(\lim_{n\to\infty} x_n)|| = \lim_{n\to\infty} ||y - Tx_n|| = 0,$$

also $y = Tx$. ■ □

Bemerkung. (*i*) *Es folgt, dass das Bild jeder offenen Menge (unter Abbildungen wie oben) in X wieder eine offene Menge in Y ist. Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen <u>offene Abbildungen</u>.*

(*ii*) *Sowohl Vollständigkeit von X als auch von Y sind notwendig.*

Korollar 4.2.2. *Seien X, Y Banachräume sowie $T : X \to Y$ linear, stetig und bijektiv. Dann ist T^{-1} stetig.*

Beweis. Nach dem Satz über die offene Abbildung existiert eine Konstante $c > 0$ mit $T(B_1(0)) \supset B_c(0)$. Folglich gilt (wegen der Bijektivität) die Implikation

$$||T(x)|| < c \implies ||x|| < 1 \quad \forall x \in X,$$

also

$$||y|| < c \implies ||T^{-1}(y)|| < 1 \quad \forall y \in Y.$$

Nach Homogenität der Norm folgt

$$||y|| < 1 \implies ||T^{-1}(y)|| < \frac{1}{c}.$$

Somit ist T^{-1} beschränkt, also stetig. □

Bemerkung. *Seien X ein Vektorraum und $||\cdot||_1$ sowie $||\cdot||_2$ Normen aus X, sodass sowohl $(X, ||\cdot||_1)$ als auch $(X, ||\cdot||_2)$ vollständig ist. Falls ein $c > 0$ mit $||\cdot||_2 \leq c \cdot ||\cdot||_1$ existiert, so folgt sofort Äquivalenz der beiden Normen. Zum Beweis nutzen wir Korollar 4.2.2 mit $T = \mathrm{id}_X$.*

Satz 4.2.3 (über den abgeschlossenen Graphen)**.** *Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear. Ist der Graph von T, i.e.*

$$G(T) := \{(x, Tx) \mid x \in X\} \subset X \times Y,$$

abgeschlossen (bzgl. einer Produktnorm, z.B. die Norm $||(x,y)||_{X\times Y} := ||x||_X + ||y||_Y$ oder, äquivalent, $||(x,y)||_{X\times Y} := \max\{||x||_X, ||y||_Y\}$), so ist T stetig.

Beweis. Wir betrachten die Normen $||x||_1 := ||x||_X + ||Tx||_Y$ und $||x||_2 := ||x||_X$. Nach Annahme ist $G(T)$ abgeschlossen, also ist $G(T)$ (als abgeschlossener Untervektorraum eines Banachraums) ein Banachraum.
Behauptung: Auch $(X, ||\cdot||_1)$ ist ein Banachraum.
Beweis: $X \times Y$ mit einer Produktnorm ist ebenfalls ein Banachraum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X bzgl. $||\cdot||_1$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. $||\cdot||_X$ und $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bzgl. $||\cdot||_Y$; dann ist $((x_n, Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $G(T)$ bzgl. derselben Norm, welche einen Limes $(x, Tx) \in G(T)$ besitzt; für diesen gilt aber $||x_n - x||_X \to 0$ und $||Tx_n - Tx|| \to 0$, also konvergiert die Folge in $(X, ||\cdot||_1)$. ■

Offensichtlich gilt $||x||_2 \leq ||x||_1 \ \forall x \in X$, also folgt aus Korollar 4.2.2, dass eine Konstante $c > 0$ mit $||x||_1 \leq c \cdot ||x||_2 \ \forall x \in X$ gilt. Damit muss aber T beschränkt sein, also ist T stetig. □

Bemerkung. *(i) Ist T stetig, so folgt (aus Folgenstetigkeit) auch sofort, dass $G(T)$ abgeschlossen ist.*

(ii) Satz 5.8 bietet eine einfache Möglichkeit, Stetigkeit linearer Operatoren zu zeigen: statt

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \implies T(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} y \text{ und } y = T(x)$$

genügt nun

$$x_k \xrightarrow{k\to\infty} x \text{ und } T(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} y \implies y = T(x).$$

(*iii*) *Nützliche Beispiele für unbeschränkte lineare Abbildungen sind (für Banachräume X, Y) alle Abbildungen der Form $T : D(T) \to Y$, wobei $D(T) \neq X$ dicht in X sei, und $G(T)$ abgeschlossen ist. Die Stetigkeit dieser Abbildung scheitert daran, dass $D(T)$ nicht das gesamte Gebiet X ist (weswegen wir den Satz über den abgeschlossenen Graphen nicht anwenden können).*
Seien beispielsweise $X = L^2((0,1))$, $D(T) = C_c^\infty((0,1))$ und $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Man erkennt, dass diese Abbildung nicht stetig (bzw. nicht beschränkt) ist, wenn man z.B. $f_j(x) = \frac{1}{j}\sin(2\pi jx)$ betrachtet (ggf. abgeschnitten, sodass diese Funktion auch tatsächlich in $C_c^\infty((0,1))$ ist). Allerdings ist $G(T)$ abgeschlossen (Übungsaufgabe).

5 Die schwachen Topologien

In unendlichdimensionalen Räumen besitzen beschränkte Folge nicht notwendigerweise konvergente Teilfolgen. Dieses Problem wollen wir in diesem Kapitel lösen.

5.1 Motivation

Satz 5.1.1. *Sei X ein separabler Banachraum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $||f_k||_{X'} \leq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in X'$ und eine Teilfolge $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit*

$$(f - f_{k_j})(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0 \ \forall x \in X.$$

Beweis. Sei $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dicht in X. Dann ist auch $Y := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots\}$ dicht in X. Die Folge $(f_k(x_n))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Ein Diagonalfolgenargument liefert eine unendliche Indexmenge $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $f_{k_j}(x_n) \xrightarrow{j\to\infty} y_n =: f(x_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da alle Funktionen f_{k_j} linear sind, folgt damit

$$f_{k_j}(y) \xrightarrow{j\to\infty} f(y) \quad \forall y \in Y$$

und Linearität von f. Ferner gilt dank der Voraussetzung $||f_{k_j}|| \leq 1$

$$|f_{k_j}(y)| \leq ||f_{k_j}|| \cdot ||y|| \leq ||y|| \quad \forall y \in Y,$$

also ist f auf Y gleichmäßig stetig. Dank Dichtheit von Y in X existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung von f auf ganz X (indem wir für jedes $x \in X \setminus Y$ eine Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in Y mit $y_j \xrightarrow{j\to\infty} x$ wählen, und $f(x) = \lim_{j\to\infty} f(y_j)$ setzen; der Nachweis von Wohldefiniertheit und Stetigkeit ist Übungsaufgabe). Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt auch, dass f linear ist, und dass $||f||_{X'} \leq 1$ gilt. Nun seien $x \in X$ und $y \in Y$. Dann gilt:

$$|(f - f_{k_j})(x)| \leq |(f - f_{k_j})(y)| + |(f - f_{k_j})(x - y)| \leq \underbrace{|(f - f_{k_j})(y)|}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} + 2||x - y||.$$

Da (dank Dichtheit von Y) y beliebig nahe an x (bzw. $||x - y||$ beliebig klein) gewählt werden kann, gilt $(f - f_n)(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. $\square$

Bemerkung. (*i*) *In diesem Fall bezeichnen wir f als den* <u>*schwach∗-Limes*</u> *der Folge* $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$.

(*ii*) *Man sieht sehr schnell, dass im Allgemeinen keine Konvergenz in $|| \cdot ||_{X'}$ gilt, da $B_1(0) \subset X'$ ansonsten folgenkompakt wäre, was für unendlichdimensionale Vektorräume X ein Widerspruch zum Satz von Riesz wäre.*

Beispiel. *Für $X = l^p$ gilt $X' = l^{(p')}$ mit $p' := \frac{p}{p-1}$, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (Übungsaufgabe). Damit besitzt sofort jede beschränkte Folge in l^p eine schwach∗-konvergente Teilfolge.*

5.2 Die schwache Topologie $\sigma(X, X')$

Im folgenden seien X eine Menge, I eine Indexmenge, Y_i topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$ Abbildungen $\forall i \in I$. Wir wollen die gröbste Topologie τ auf X finden, sodass alle Abbildungen $(f_i)_{i \in I}$ stetig sind (das finden *einer* solchen Topologie ist trivial, da man dafür einfach die diskrete Topologie wählen könnte). Seien also nun $(\omega_i^j)_{j \in J_i}$ die offenen Mengen in Y_i für (ggf. überabzählbare) Indexmengen J_i für jedes $i \in I$. Damit f_i stetig ist, muss gelten:

$$f_i^{-1}(\omega_i^j) \in \tau \ \forall i \in I, j \in J_i,$$

also

$$\{f_i^{-1}(\omega_i^j) \mid i \in I, j \in J_i\} \subset \tau.$$

Proposition 5.2.1. *Sei $S \subset \mathcal{P}(X)$ mit $\varnothing, X \in S_n$. Sei Φ die Menge von Teilmengen von X, welche aus endlichen Schnitten von Mengen in S bestehen, d.h.*

$$\Phi = \left\{ \bigcap_{j=1}^{k} s_j \mid k \in \mathbb{N}, \ s_1, \ldots, s_k \in S \right\}.$$

Dann sei Ψ die Menge aller (beliebigen) Vereinigungen von Mengen in Φ, also

$$\Psi = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \phi_\lambda \mid \Lambda \text{ Indexmenge}, \ \phi_\lambda \in \Phi \ \forall \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Dann ist Ψ die gröbste Topologie, die alle Mengen in S enthält.

Beweis. Wir müssen folgende Aussagen zeigen:

(i) Ψ ist eine Topologie auf X, d.h. Ψ ist stabil unter endlichen Schnitten und beliebigen Vereinigungen, und es gilt $\varnothing, X \in \Psi$.

(ii) Ψ enthält alle Mengen in S.

(iii) Ist $\Psi' \subset \Psi$ eine Topologie auf X mit $S \subset \Psi'$, so gilt bereits $\Psi' = \Psi$.

Beweis:

(i) $\varnothing, X \in \Psi$ sowie Stabilität unter beliebigen Vereinigungen sind klar. Seien also $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$. Dann existieren Darstellungen

$$\psi_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \quad \psi_2 = \bigcup_{\kappa \in K} B_\kappa$$

mit Indexmengen Λ, K und $A_\lambda, B_\kappa \in \Phi \ \forall \lambda \in \Lambda,\ \kappa \in K$. Dann gilt:

$$\psi_1 \cap \psi_2 = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\kappa \in K} B_\kappa \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\kappa \in K} \underbrace{(A_\lambda \cap B_\kappa)}_{\in \Phi} \in \Psi.$$

(ii) Wegen $S \subset \Phi$ ist dies trivial.

(iii) Sei Ψ' wie oben. Angenommen, es gäbe ein $\widetilde{\psi} \in \Psi \setminus \Psi'$. $\widetilde{\psi}$ ist aber per Definition von Ψ eine Vereinigung von endlichen Schnitten aus S; gilt $S \subset \Psi'$, so kann Ψ' damit aber keine Topologie mehr sein. $\lightning$

$\square$

Korollar 5.2.2. *Mit $S = \{f_i^{-1}(\omega_i^j) \mid i \in I, j \in J_i\}$ und Ψ wie in Proposition 5.2.1 bekommen wir die gesuchte gröbste Topologie, in welcher alle Funktionen $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ stetig sind.*

Beweis. Klar. $\square$

Proposition 5.2.3. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum, sodass τ die gröbste Topologie ist, in welcher alle Funktionen $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$ stetig sind. Dann gilt*

$$x_n \xrightarrow{\tau} x \iff f_i(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f_i(x) \ \forall i \in I.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: trivial, da alle Funktionen f_i stetig (und damit folgenstetig) sind.
„$\Leftarrow$“: Sei $U \in \tau$ mit $x \in U$. Dann existieren (per Definition von τ) eine Indexmenge

Λ und Indizes $K(\lambda)$ und $i(\kappa,\lambda) \in \mathbb{N}\ \forall \lambda \in \Lambda, \kappa \in \{1,\dots,K(\lambda)\}$ sowie offene Mengen $V_{\kappa,\lambda} \subset Y_{i(\kappa,\lambda)}$ mit

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda)} f_{i(\kappa,\lambda)}^{-1}(V_{\kappa,\lambda}).$$

Da $x \in U$ ist, existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit

$$x \in \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda_0)} f_{i(\kappa,\lambda_0)}^{-1}(V_{\kappa,\lambda_0}).$$

Nach Annahme gilt

$$f_{i(\kappa,\lambda_0)}(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_{i(\kappa,\lambda_0)}(x)\ \forall \kappa \in \{1,\dots,K(\lambda_0)\}.$$

Somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$f_{i(k,\lambda_0)}(x_n) \in V_{\kappa,\lambda_0} \quad \forall n \geq N, \kappa \in \{1,\dots,K(\lambda_0)\}$$

$$\implies x_n \in \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda_0)} f_{i(\kappa,\lambda_0)}^{-1}(V_{\kappa,\lambda_0}) \subset U\ \forall n \geq N.$$

Per Definition der topologischen Stetigkeit gilt damit $x_n \xrightarrow{\tau} x$. □

Proposition 5.2.4. *Sei Z ein topologischer Raum und $\psi : Z \to (X,\tau)$ eine Funktion, wobei τ dieselbe Topologie wie bisher sei. Dann ist ψ genau dann stetig, wenn $f_i \circ \psi$ für alle $i \in I$ stetig ist.*

Beweis. „⇒“: Diese Richtung ist wieder klar, da Verkettungen stetiger Funktionen stetig sind.
„⇐“: Sei $U \in \tau$. Wir nutzen wir in der vorangegangenen Proposition die Darstellung

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda)} f_{i(\kappa,\lambda)}^{-1}(V_{\kappa,\lambda}).$$

Dann ist

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda)} \psi^{-1}(f_i^{-1}(V_{i(\kappa,\lambda)})) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda)} \underbrace{(\overbrace{f_i \circ \psi}^{\text{nach Annahme stetig}})^{-1}(\overbrace{V_{i(\kappa,\lambda)}}^{\text{offen}})}_{\in Z} \in Z.$$

□

Definition 5.2.5. *Sei (X,τ) ein topologischer Raum.*

(*i*) *Eine Menge* $N \subset X$ *heißt* <u>*Umgebung von* $x_0 \in X$</u>, *falls ein* $U \in \tau$ *mit* $x_0 \in U \subset N$ *existiert.*

(*ii*) *Eine Familie* W *von Mengen in* X *heißt* <u>*Umgebungsbasis von* $x_0 \in X$</u>, *wenn jedes* $N \in W$ *eine Umgebung von* x_0 *ist, und die folgende Implikation gilt:*

$$M \text{ Umgebung von } x_0 \implies \exists N \in W : N \subset M.$$

Definition 5.2.6. *Sei* X *ein Banachraum. Die schwache Topologie* $\sigma(X, X')$ *ist die gröbste Topologie, in welcher alle Abbildungen im Dualraum* X' *stetig sind (als Abbildungen von* X *nach* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$*).*

Bemerkung. *Wir sehen sofort, dass jede bzgl.* $\sigma(X, X')$ *offene Menge* $U \subset X$ *auch offen bzgl.* $||\cdot||_X$ *ist, denn die durch* $||\cdot||_X$ *induzierte Topologie ist feiner als* $\sigma(X, X')$

Proposition 5.2.7. *Der Raum* $(X, \sigma(X, X'))$ *ist ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $f \in X'$, sodass $\mathrm{Re}(f(x_1)) \neq \mathrm{Re}(f(x_2))$ ist. Damit existieren Mengen U_1, U_2, welche offen in $\mathbb{K}$ sind, sodass $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $f(x_1) \in U_1$ und $f(x_2) \in U_2$ ist. Es folgt:

$$\begin{array}{ccc} \sigma(X,X') & & \sigma(X,X') \\ \Cup & & \Cup \\ f^{-1}(U_1) & \cap & f^{-1}(U_2) = \varnothing \\ \Cup & & \Cup \\ x_1 & & x_2 \end{array}$$

□

Proposition 5.2.8. *Sei* $x_0 \in X$*. Die Vereinigung aller Mengen der Form*

$$V = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \ \forall i \in I\}$$

ist eine Umgebungsbasis von x_0 *bzgl.* $\sigma(X, X')$*, wobei jeweils* I *eine endliche Indexmenge,* $\varepsilon > 0$ *und* $f_i \in X'$ $\forall i \in I$ *ist.*

Beweis. Alle Mengen V dieser Form sind offen und enthalten x_0. Sei nun N eine Umgebung von x_0 bzgl. $\sigma(X, X')$. Dann existiert ein $U \in \sigma(X, X')$ mit $x_0 \in U \subset N$. Wir finden erneut eine Darstellung der Form

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda)} f_{\kappa,\lambda}^{-1}(V_{\kappa,\lambda}).$$

für $f_{\kappa,\lambda} \in X'$ und offene Mengen $V_{\kappa,\lambda} \subset \mathbb{K}$. Damit existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit

$$x_0 \in \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda_0)} f_{\kappa,\lambda_0}^{-1}(V_{\kappa,\lambda_0}).$$

Seien nun $y_{\kappa,\lambda_0} := f_{\kappa,\lambda_0}(x_0)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(y_{\kappa,\lambda_0}) \subset V_{\kappa,\lambda_0} \quad \forall \kappa \in \{1, \dots, K(\lambda_0)\}.$$

Wir setzen nun

$$V = \bigcap_{\kappa=1}^{K(\lambda_0)} f_{\kappa,\lambda_0}^{-1}(B_\varepsilon(y_{\kappa,\lambda_0})) = \{x \in X : |f_{\kappa,\lambda_0}(x - x_0)| < \varepsilon \ \forall \kappa \in \{1, \dots, K(\lambda_0)\}\}.$$

Wegen $V \subset U \subset N$ folgt die Behauptung. □

Notation. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$. Wir schreiben „$x_k \rightharpoonup x$" für $x_k \xrightarrow{\sigma(X,X')} x$. Falls die Gefahr der Verwechslung groß ist, schreiben wir auch $x_k \xrightarrow{schwach} x$ für Konvergenz bzgl. $\sigma(X, X')$ und und $x_k \xrightarrow{stark} x$ für Konvergenz bzgl. $||\cdot||_X$.*

Proposition 5.2.9. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum X und sei $x \in X$. Dann gilt:*

(*i*) $x_n \rightharpoonup x \iff f(x_n) \to f(x) \ \forall f \in X'$,

(*ii*) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x$,

(*iii*) $x_n \rightharpoonup x \implies \exists C > 0 : ||x_n|| \le C \ \forall n \in \mathbb{N}$ *und* $||x|| \le \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$,

(*iv*) $x_n \rightharpoonup x$, $f_n \xrightarrow{||\cdot||_{X'}} f \implies f_n(x_n) \to f(x)$.

Beweis. (*i*) Folgt sofort aus Proposition 5.2.3.

(*ii*) Gelte $x_n \to x$. Dann gilt für jedes $f \in X'$

$$|f(x_n) - f(x)| \le ||f||_{X'} \cdot ||x_n - x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

also folgt mit (*i*) auch $x_n \rightharpoonup x$.

(*iii*) Für die erste Aussage genügt es nach Korollar 4.1.3 zu zeigen, dass $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist für alle $f \in X'$. Dies ist aber dank (*i*) klar, da jede Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente (und damit beschränkte) Folge in $\mathbb{C}$ ist.
Für die andere Aussage sehen wir, dass für jedes $f \in X'$ gilt:

$$|f(x_n)| \le ||f||_{X'} \cdot ||x_n|| \ \forall n \in \mathbb{N} \implies |f(x)| \le ||f||_{X'} \cdot \liminf_{n\to\infty} ||x_n||.$$

Dank einem Korollar aus dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $f \in X'$ mit $||f||_{X'} = 1$ und $|f(x)| = ||x||$.

(iv) Mit Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \underbrace{||f_n - f||_{X'}}_{\to 0} \cdot \underbrace{||x_n||}_{\leq C \text{ nach } (iii)} + \underbrace{|f(x_n) - f(x)|}_{\to 0}.\end{aligned}$$

□

Satz 5.2.10. *In endlichdimensionalen Banachräumen stimmen starke und schwache Topologie überein.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung. (i) *In unendlichdimensionalen Räumen ist dies nie der Fall. Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum, $S := \{x \in X : ||x|| = 1\}$. Diese Menge ist (als Urbild von $\{1\}$ und der stetigen Funktion $||\cdot||$) stark abgeschlossen. Wir zeigen, dass*

$$\overline{S}^{\sigma(X,X')} \supset \overline{B_1(0)}^{||\cdot||} =: \overline{B}$$

ist. Sei also $x_0 \in \overline{B}$, U eine Umgebung von x_0 bzgl. $\sigma(X, X')$. Z.z.: $U \cap S \neq \varnothing$. Nach Proposition 5.2.8 können wir annehmen, dass U die Form

$$U = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \; \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in X'$ und $\varepsilon > 0$ hat. Sei nun $y_0 \in X \setminus \{0\}$, sodass $f_i(y_0) = 0 \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist. Solch ein y_0 existiert, denn es muss ein y_0 im Kern der linearen Abbildung

$$\phi : X \to \mathbb{K}^n, \; \phi(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

existieren, denn ϕ kann (aufgrund der Tatsache, dass X unendlichdimensional ist, aber $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n < \infty$ ist) nicht injektiv sind.
Nun sei $g(t) := ||x_0 + ty_0||$. Diese Abbildung ist stetig, $g(0) = ||x_0|| \leq 1$ und $g(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $g(t_0) = 1$, also $x_0 + t_0 y_0 \in S$. Allerdings gilt $f_i(x_0 + t_0 y_0) = f_i(x_0) \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$, also ist $x_0 + t_0 y_0 \in U$.

Ebenso sieht man, dass $B_1(0)$ nicht offen bzgl. $\sigma(X, X')$ ist, falls X unendlichdimensional ist, denn man kann zeigen, dass

$$(B_1(0))^\circ_{\sigma(X,X')} = \varnothing$$

ist.

(ii) *Die schwache Topologie auf unendlichdimensionalen Banachräumen ist leider auch nie metrisierbar (d.h. es existiert keine Metrik, die diese Topologie induziert).*

(iii) *Zwei Metriken d_1, d_2 auf X, welche dieselben konvergenten Teilfolgen besitzen (d.h. x_n konvergiert bzgl. d_1 genau dann, wenn x_n bzgl. d_2 konvergiert), induzieren auch dieselbe Topologie. Auch dies funktioniert hier nicht. Beispielsweise im Raum $X = l^1$ gilt*

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{l^1}} x \iff x_n \xrightarrow{\sigma(l^1,(l^1)')} x,$$

aber da X unendlichdimensional ist, sind trotz der Tatsache, dass die starke und die schwache Topologie hier dieselben konvergenten Teilfolgen haben, die beiden Topologien nicht gleich.
Dass diese Topologien dieselben konvergenten Folgen haben, ist aber nur „selten“ der Fall.

Satz 5.2.11. *Sei $C \subset X$ konvex. Dann ist C stark abgeschlossen genau dann, wenn C schwach abgeschlossen ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Da die schwache Topologie nicht stärker als die starke Topologie ist, folgt trivialerweise, dass jede schwach abgeschlossene Menge auch stark abgeschlossen ist.

„$\Rightarrow$“: Sei C stark abgeschlossen und konvex, sowie $x_0 \in X \setminus C$. Wir müssen eine Umgebung $U \in \sigma(X, X')$ von x_0 finden, sodass $U \cap C = \varnothing$ ist. Nach dem zweiten Trennungssatz existiert ein $f \in X'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass

$$\mathrm{Re}(f(x_0)) < \alpha < \mathrm{Re}(f(x)) \ \forall x \in C$$

gilt. Somit erfüllt die Menge

$$U := \{x \in X \mid \mathrm{Re}(f) < \alpha\} = (\mathrm{Re}(f))^{-1}(-\infty, \alpha) \in \sigma(X, X')$$

die gewünschte Voraussetzung. □

Bemerkung. *Zusammen mit der vorangegangenen Bemerkung ergibt sich, dass in unendlichdimensionalen Vektorräumen gilt:*

$$\overline{S}^{\sigma(X,X')} = \overline{B_1(0)}^{\|\cdot\|_X}.$$

Lemma 5.2.12 (Mazur)**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \rightharpoonup x \in X$. Dann existiert eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Konvexkombinationen der Punkte $(x_1, \dots, x_n)$, d.h.*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n} \in \mathbb{R}_{\geq 0} : y_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} = 1,$$

sodass $y_n \xrightarrow{stark} x$ gilt.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung. *Insbesondere gilt $x \in \operatorname{conv}(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.*

Satz 5.2.13. *Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear. Dann ist T stetig bzgl. der schwachen Topologien auf X und Y genau dann, wenn T stetig bzgl. der starken Topologien auf X und Y ist. Anders gesagt ist $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ genau dann stetig, wenn $T : (X, ||\cdot||_X) \to (Y, ||\cdot||_Y)$ stetig ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei T stark stetig. Nach Proposition 5.2.4 genügt es zu zeigen, dass für alle $f \in Y'$ die lineare Funktion

$$F : (X, \sigma(X, X')) \to (\mathbb{K}, |\cdot|), \ x \mapsto f(Tx)$$

stetig ist. Sei also $f \in Y'$ und F entsprechend. T und f sind stark stetig, so also auch F. Damit ist $F \in X'$. Nach Konstruktion von $\sigma(X, X')$ ist damit F schwach stetig.

„$\Rightarrow$“: Sei nun T schwach stetig. Damit ist der Graph $G(T)$ abgeschlossen in $X \times Y$ bzgl. $\sigma(X, X') \otimes \sigma(Y, Y')$. Damit ist $G(T)$ aber auch stark abgeschlossen (denn das Komplement von $G(T)$ ist schwach offen, und damit insbesondere stark offen), also folgt aus dem Satz des abgeschlossenen Graphen, dass T stark stetig ist. □

5.3 Die Schwach-$*$-Topologie

Sei X ein Banachraum und X' der Dualraum von X mit seiner üblichen Norm

$$||f||_{X'} \sup_{\substack{x\in X \\ ||x||\leq 1}} |f(x)|.$$

Sei weiter X'' der Bidualraum von X, d.h. der Dualraum von X', mit der Norm

$$||\xi||_{X''} = \sup_{\substack{f\in X' \\ ||f||_{X'}\leq 1}} |\xi(f)|.$$

Definition 5.3.1. *Die* <u>*kanonische Injektion*</u> $J : X \to X''$ *ist gegeben durch*

$$x \mapsto J(x), J(x)(f) := f(x).$$

Bemerkung. *(i) Für festes $x \in X$ ist die Abbildung $f \mapsto f(x)$ stetig als Abbildung von $(X', ||\cdot||_{X'})$ nach $\mathbb{K}$, und außerdem linear. Damit ist aber $J(x)$ durchaus ein stetiges, lineares Funktional auf X', d.h. $J(x) \in X''$.*

(ii) J ist eine Isometrie, da

$$||J(x)||_{X''} = \sup_{||f||_{X'} \leq 1} |J(x)(f)| = \sup_{||f||_{X'} \leq 1} |f(x)| = ||x||_X,$$

nach dem Satz von Hahn-Banach. Damit ist J auch injektiv (da nur $0 \in X$ auf $0 \in \mathbb{K}$ abgebildet werden kann). Es gibt Fälle, in welchen J nicht surjektiv ist (s. Übungsaufgabe). Man kann aber natürlich immer den Untervektorraum $J(X) \subset X''$ mit X identifizieren, womit

$$X \to J(X), x \mapsto J(x)$$

ein Isomorphismus ist.

(iii) Räume X, für die $J(X) = X''$ gilt, heißen <u>*reflexiv*</u>*.*

Auf X' kennen wir bereits zwei Topologien:

(i) die starke Topologie, induziert von $||\cdot||_{X'}$, und

(ii) die schwache Topologie $\sigma(X', X'')$.

Wir definieren nun eine dritte Topologie auf X'.

Definition 5.3.2. *Die* <u>*schwach-$*$-Topologie*</u> $\sigma(X', X)$ *ist die gröbste Topologie auf X', in welcher alle Funktionen der Form*

$$\varphi_x : X' \to \mathbb{K},\ f \mapsto \varphi_x(f) = (Jx)f = f(x)$$

(für $x \in X$) stetig sind.

Bemerkung. *(i) Ist X endlichdimensional, so stimmen schwache-, schwach-$*$- und starke Topologie überein.*

(ii) Ist $J(X)$ ein echter Untervektorraum von X'', d.h. $J(X) \neq X''$, so ist die schwache Topologie $\sigma(X', X'')$ strikt feiner als die schwach-$*$-Topologie $\sigma(X', X)$.

Beispiel. *Sei $\xi \in X'' \setminus J(X)$. Dann ist*

$$H := \{f \in X' \mid \xi(f) = 0\}$$

abgeschlossen bzgl. $\sigma(X', X'')$ (denn H ist konvex und bzgl. $||\cdot||_{X'}$ abgeschlossen, i.e. stark abgeschlossen), aber leider nicht abgeschlossen bzgl. $\sigma(X', X)$.

Proposition 5.3.3. *Der Raum $(X', \sigma(X', X))$ ist Hausdorff'sch.*

Beweis. Seien $f, g \in X'$ mit $f \neq g$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. O.B.d.A. gelte für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, dass $\operatorname{Re} f(x) < \alpha < \operatorname{Re} g(x)$ ist. Wir setzen

$$U_1 := \{h \in X' \mid \operatorname{Re} h(x) < \alpha\},\ U_2 := \{h \in X' \mid \operatorname{Re} h(x) > \alpha\}.$$

Dann gilt $f \in U_1$, $g \in U_2$, U_1, U_2 offen bzgl. $\sigma(X', X)$ (da U_1, U_2 Urbilder offener Mengen unter Abbildungen wie in Definition 5.3.2 sind), und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. □

Proposition 5.3.4. *Sei $f_0 \in X'$. Die Vereinigung aller Mengen der Form*

$$V = \{f \in X' : |f - f_0|(x_i) < \varepsilon\ \forall i \in I\},$$

wobei I eine endliche Indexmenge und $x_i \in X\ \forall i \in I$ sowie $\varepsilon > 0$ sei, ist eine Umgebungsbasis von f_0 bzgl. $\sigma(X', X)$.

Beweis. Analog zu Proposition 5.2.8. □

Proposition 5.3.5. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X'. Dann gilt:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X$,

(ii) $f_n \xrightarrow{||\cdot||_{X'}} f \implies f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$,

(iii) $f_n \rightharpoonup f \implies f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$,

(iv) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \implies (||f_n||'_X)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt in* $\mathbb{R}$ *und* $||f||_{X'} \leq \liminf_{n\to\infty} ||f_n||_{X'}$,

(v) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, $x_n \xrightarrow{stark} x \implies f_n(x_n) \to f(x)$.

Beweis. Die Eigenschaften (i), (ii), (iv) und (v) folgen analog zu Proposition 5.2.9, wobei wir für (iv) Korollar 4.1.4 (statt Korollar 4.1.3) verwenden.
(iii) folgt daraus, dass $J(X)$ ein Untervektorraum von X'' ist, womit $\sigma(X', X)$ gröber als $\sigma(X', X'')$ ist. □

Satz 5.3.6 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Die Menge $\{f \in X' : ||f||_{X'} \leq 1\} = \overline{B_1(0)} \subset X'$ ist kompakt bzgl. der schwach-$*$-Topologie $\sigma(X', X)$.*

Bemerkung. *Der Beweis benutzt den Satz von Tychonoff, welcher gesagt, dass Produkträume kompakter topologischer Räume (auch überabzählbar vieler) kompakt sind bzgl. der Produkttopologie (s. nachfolgende Definition).*

Definition 5.3.7. *Sei* $(Y_i)_{i\in I}$ *eine Familie von topologischen Räumen, und sei*

$$Y = \prod_{i\in I} Y_i = \{(y_i)_{i\in I} \mid y_i \in Y_i \ \forall i \in I\}.$$

Die <u>*Produkttopologie*</u> *auf* Y *ist die gröbste Topologie, in welcher alle Abbildungen der Form*

$$\phi_i : Y \to Y_i,\ \phi_i(y) = \phi_i((y_j)_{j\in I}) = y_i,$$

i.e. alle Projektionen auf Y_i, $i \in I$, *stetig sind.*

Satz 5.3.8 (Tychonoff)**.** *Sei* $X = \prod_{i\in I} X_i$ *ein Produktraum, wobei* X_i *kompakt* $\forall i \in I$ *sei. Dann ist* X *kompakt bzgl. der Produkt-Topologie.*