# Blatt Nr. 1
# Einige Klassiker der Analysis

30. April 2025

Abgabe am 7. Mai 2025

**Ein schlechter Raum für den Laplace-Operator.** *Dieses Beispiel wird in der ersten Woche in den Übungsgruppen besprochen und muss nicht individuell bearbeitet werden.*

Wir zeigen, dass der Laplaceoperator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ als linearer Operator

$$-\Delta\colon X \to Y, \quad X = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad Y = C(\Omega)$$

zwischen Funktionenräumen $X, Y$ für offene Mengen in $\mathbf{R}^n$ injektiv, aber nicht surjektiv ist. Der Einfachheit halber sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbf{R}^2$ eine offene Kreisscheibe, und $\eta \in C^\infty(\mathbf{R})$ eine glatte Funktion, sodass

$$\eta(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} \eta'(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \eta''(t) = 0.$$

und setze

$$g(x,y) \coloneqq xy \cdot \eta(-\log(x^2+y^2)), \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \Delta g(x,y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Man beachte, dass der Laplace vor der Reskalierung angewandt wird. Wir werden zeigen, dass

- Der Laplace-Operator ist eine stetige injektive Abbildung von $X$ nach $Y$,
- $f \in C(\overline{\Omega}) \subset Y$ und
- Es existiert kein $u \in Y$ sodass $-\Delta u = f$.

1. **(4 + 2* Punkte) Funktionen auf metrischen Räumen.** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

   a) Ist $K \subset X$ abgeschlossen, so gibt es eine stetige Funktion $\psi_K\colon X \to [0,\infty)$, sodass $K = \psi^{-1}(0) = \{x \in X : \psi(x) = 0\}$ ist.

   b) Sind $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, so gibt es eine stetige Funktion $\phi_{A,B}\colon X \to [0,1]$ sodass $\phi_{A,B} \equiv 1$ auf $A$ und $\phi_{A,B} \equiv 0$ auf $B$.

*) Sei $Y \subset X$ abgeschlossen, $f\colon Y \to \mathbf{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $\bar{f}\colon X \to \mathbf{R}$ gibt, sodass $\bar{f}|_Y = f$ und $\sup \bar{f} = \sup f$, $\inf \bar{f} = \inf f$. (Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $f \geq 0$. Wählen Sie $\psi_K$ auf $X$ für $K = \{x \in Y : f(y) \geq 2\,\|f\|/3\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\bar{f}_1\colon X \to \mathbf{R}, \quad \bar{f}_1 = \frac{\|f\|}{3}\,\psi_K$$

und $f - \bar{f}_1$ auf $Y$. Iterieren Sie den Approximationsvorgang und benutzen sie, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge gleichmäßig beschränkter stetiger Funktionen stetig ist.)

**2. (4 Punkte) Der Satz von Arzelà-Ascoli.** Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ offen und beschränkt und $f_n$ eine Folge im Banachraum $C(\overline{\Omega})$ der stetigen Funktionen von $\overline{\Omega}$ nach $\mathbf{R}$. Nehmen Sie an, dass die Folge folgende Eigenschaften hat:

- Sie ist gleichmäßig beschränkt, d.h. für jedes $x \in \overline{\Omega}$ gibt es $L_x > 0$, sodass $|f_n(x)| \leq L_x$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und
- sie ist gleichgradig stetig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

  für alle $n \in \mathbf{N}$.

Zeigen Sie, dass $f_n$ eine konvergente Teilfolge hat. Anleitung:

a) Zeigen Sie: Es existiert $L > 0$ sodass $|f_n(x)| \leq L$ für alle $x \in \overline{\Omega}$, $n \in \mathbf{N}$.

b) Wählen Sie eine abzählbare dichte Menge $D = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\overline{\Omega}$. Zeigen Sie, dass es eine Teilfolge von $f_n$ und $\alpha_k \in \mathbf{R}$ gibt, sodass $f_n(x_k) \to \alpha_k$ für alle $k \in \mathbf{N}$ konvergiert. (Hinweis: Diagonalfolge.)

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f}\colon D \to \mathbf{R}$, $\tilde{f}(x_k) = \alpha_k$ eine eindeutige stetige Fortsetzung $f$ auf $\overline{\Omega}$ hat.

d) Zeigen Sie, dass die Teilfolge, die Sie ausgewählt haben, auf $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.

**3. (4 + 2* Punkte) Hölder-Räume.** Es seien $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ offen und beschränkt, $\alpha \in (0,1]$. Wir definieren den Raum

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{x,y \in \Omega : x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty \right\}.$$

a) Sei $\alpha \in (0,1]$ und

$$u_\beta(x) := |x|^\beta, \quad x \in [-1,1], \quad \beta > 0.$$

- Zeigen Sie, dass die Funktion $u_\beta$ zu $C^{0,\alpha}[-1,1]$ gehört, wenn $\beta \geq \alpha$.
- Umgekehrt, zeigen Sie, dass $u_\beta$ nicht zu $C^{0,\alpha}[-1,1]$ gehört, wenn $\beta < \alpha$.
- Können Sie eine Funktion $u \in \bigcap_{0<\beta<\alpha} C^{0,\beta}[-1,1] \setminus C^{0,\alpha}[-1,1]$ finden?

b) Zeigen Sie, dass die Räume $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ Banachräume sind mit der Norm

$$\|u\|_{0,\alpha} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x,y\in\Omega: x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

c) Zeigen Sie, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\|u_\alpha - u\|_{0,\alpha} \geq \delta$ für jede Funktion $u \in C^1[-1,1]$ gilt, wobei $u_\alpha$ die in a) definierte Funktion ist. Das bedeutet, dass $C^1[-1,1]$ *nicht* dicht in $C^{0,\alpha}[-1,1]$ ist.

$*$) Sei $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ eine Funktionenfolge, sodass $\|u_n\|_{0,\beta}$ beschränkt ist für $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Zeigen Sie, dass $u \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$ und eine Teilfolge $u_{n_k}$ existieren, sodass $u_{n_k} \to u$ bezüglich der $C^{0,\alpha}$-Norm. (Hinweis: Ascoli-Arzelà.)

**4. (4 Punkte) Kodimension 1 oder dichter Kern.** Es sei $X$ ein Banachraum über $\mathbf{R}$, $f\colon X \to \mathbf{R}$ linear, und $\ker f := f^{-1}(0)$. Zeigen Sie:

a) $\ker f$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $f$ stetig ist.

b) Wenn $f$ unstetig ist, dann ist $\ker f$ dicht. (Hinweis: Wählen Sie eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ mit $f(x_n) \geq n\|x_n\|$.)