Blatt Nr. 2
L^p Räume

7. Mai 2025

Abgabe am 14. Mai 2025

1. (4 Punkte) Eine Interpolationsungleichung. Sei $1 \le p < r < q \le \infty$ und $u \in L^p(\mathbf{R}^d) \cap L^q(\mathbf{R}^d)$. Wählen Sie $\theta \in (0,1)$ so, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

und zeigen Sie, dass $u \in L^r(\mathbf{R}^d)$ und

$$\|u\|_{L^r(\mathbf{R}^d)} \le \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^d)}^{\theta} \|u\|_{L^q(\mathbf{R}^d)}^{1-\theta}.$$

2. (4 + 2* Punkte) Der Satz von Fréchet-Kolmogorov. Sei $1 \le p < \infty$, und sei $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $L^p(\mathbf{R}^d)$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- Die Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt,
- $\displaystyle \lim_{h \to 0} \sup_{n \ge 1} \int_{\mathbf{R}^d} |u_n(x+h) - u_n(x)|^p \, dx = 0,$
- $\displaystyle \lim_{R \to \infty} \sup_{n \ge 1} \int_{|x| \ge R} |u_n(x)|^p \, dx = 0.$

Zeigen Sie, dass $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Befolgen Sie dazu die folgenden Schritte:

a) Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ der Standard-Glättungskern, und betrachten Sie die geglättete Folge $\{\eta_\delta * u_n\}_{n=1}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 > 0$ existiert, sodass

$$\sup_{n \ge 1} \|\eta_\delta * u_n - u_n\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} < \varepsilon,$$

für alle $\delta < \delta_0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta > 0$ eine Konstante C_δ existiert, sodass

$$\|\nabla(\eta_\delta * u_n)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \le C_\delta \|u_n\|_{L^p(\mathbf{R}^d)},$$

und folglich die Folge $\{\eta_\delta * u_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichgradig stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ existiert, die eine Cauchy-Folge ist, und folgern Sie das gewünschte Resultat, das heißt die Konvergenz der Teilfolge.

$*$) Können Sie die Voraussetzung der Beschränktheit weglassen?

3. (4 Punkte) Fehlerterm im Lemma von Fatou. Sei $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge von Funktionen in $L^p(\mathbf{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, die fast überall gegen eine Funktion u konvergiert.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε existiert, sodass

$$||a+b|^p - |b|^p| \le \varepsilon |b|^p + C_\varepsilon |a|^p,$$

für alle $a, b \in \mathbf{R}$. (Hinweis: Für $p > 1$, nutzen Sie die Konvexität von $t \mapsto |t|^p$ und die Jensensche Ungleichung $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.)

b) Wir definieren

$$E_n^\varepsilon := \left(||u_n|^p - |u_n - u|^p - |u|^p| - \varepsilon |u_n - u|^p\right)_+ ,$$

wobei $(\cdot)_+ := \max\{\cdot, 0\}$ den positiv Teil bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} E_n^\varepsilon \; dx = 0.$$

c) Folgern Sie, dass unter der zusätzlichen Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} = \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^d)},$$

die Konvergenz $u_n \to u$ in $L^p(\mathbf{R}^d)$ gilt.

4. (4 + 2* Punkte) Integraloperatoren. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ eine offene Menge endlichen Maßes, und sei $k \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$. Sei $1 \le p, q \le \infty$ und wir definieren den linearen Operator

$$(Tu)(x) := \int_\Omega k(x,y) u(y) \; dy, \quad u \in L^p(\Omega).$$

a) Zeigen Sie, dass $T\colon L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ für alle p, q beschränkt ist.

$*$) Nehmen Sie an, dass $k \ge 0$ fast überall in $\Omega \times \Omega$ gilt. Berechnen Sie die Operatornorm $\|T\|$ für alle p, q.