Blatt Nr. 3
Linearen Funktionalen und der Satz von Hahn-Banach

14. Mai 2025

Abgabe am 21. Mai 2025

1. **(4 Punkte) Ein lineares Funktional.** Betrachten Sie den Raum der stetigen Funktionen $C^0[-1,1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Sei $f\colon C^0[-1,1] \to \mathbf{R}$ definiert als
$$f(u) := \int_{-1}^{1} u(x)\, dx - u(0), \quad u \in C^0[-1,1].$$
   a) Zeigen Sie, dass $f \in (C^0[-1,1])^*$.
   b) Berechnen Sie die Norm $\|f\|$.
   c) Gibt es ein u sodass $|f(u)| = \|f\|\|u\|$?

2. **(4 Punkte) Abstand zu einem Untervektorraum.** Sei X ein Banachraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener echter Untervektorraum. Sei $x_0 \in X \setminus Y$. Zeigen Sie, dass es ein $f \in X^*$ gibt, sodass:
   - $f(y) = 0$ für alle $y \in Y$,
   - $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$,
   - $\|f\| = 1$.

   Leiten Sie das *Lemma von Riesz* ab: Wenn $Y \subset X$ ein abgeschlossener echter Untervektorraum ist, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x \in X \setminus Y$ mit Norm 1, sodass $\|x - y\| \geq 1 - \varepsilon$ für alle $y \in Y$.

3. **(4 Punkte) Verallgemeinerte Limiten.** Zeigen Sie, dass es eine „verallgemeinerte Limes“ $L \in \ell^\infty(\mathbf{N})^*$ gibt, sodass
   a) $L(x) \geq 0$, wenn $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \geq 0$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ erfüllt;
   b) $L = L \circ \sigma$, wobei $\sigma(x) = (x_{n+1})_{n=1}^\infty$ der „Linksshift“ ist;
   c) $L(x) = L(y)$, wenn $x_n \neq y_n$ nur für endlich viele $n \in \mathbf{N}$ gilt;
   d) $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für jede konvergente Folge x.

   (Hinweis: Definieren Sie $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, und zeigen Sie, dass es sublineare ist. Erweitern Sie $\lim_{n\to\infty}(\cdot)$, definiert auf dem Untervektorraum der konvergenten Folgen.)

4. (4 + 2* Punkte) Trennung von konvexen Mengen im Endlichdimensionalen. Es sei X ein endlichdimensionaler, reeller, normierter Vektorraum. Weiter sei $C \subset X$ konvex und nicht leer und es gelte $0 \notin C$. Wir wollen zeigen, dass es immer, das heißt ohne weitere Annahmen, eine abgeschlossene Hyperebene gibt, die C von 0 trennt.

a) Zeigen Sie: Jede Hyperebene in X ist abgeschlossen.

b) Es sei $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ eine dichte und abzählbare Teilmenge von C. Für $n \in \mathbf{N}$ sei

$$C_n := \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

die konvexe Hülle der Punkte x_1 bis x_n. Zeigen Sie, dass C_n kompakt ist und $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ dicht in C liegt.

c) Zeigen Sie: Es existieren $f_n \in X^*$, sodass

$$\|f_n\| = 1 \quad \text{und} \quad f_n(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in C_n.$$

d) Zeigen Sie: Es existiert $f \in X^*$, sodass

$$\|f\| = 1 \quad \text{und} \quad f(x) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in C.$$

$*$) Seien A und B konvexe, nicht leere und disjunkte Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass eine abgeschlossene Hyperebene existiert, die A von B trennt.