FUNKTIONALANALYSIS
PROF. DR. PATRICK DONDL
DR. LUCIANO SCIARAFFIA

Blatt Nr. 4
Der Satz von Baire und Folgerungen

21. Mai 2025

Abgabe am 28. Mai 2025

1. **(4 Punkte) Endliche oder überabzählbare Basis.** Sei X ein Banachraum, und sei $B = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine *Hamelbasis* für X, das heißt, jedes $x \in X$ kann eindeutig als eine endliche Linearkombination $x = a_1 x_{\alpha_1} + \cdots + a_n x_{\alpha_n}$ geschrieben werden. Zeigen Sie, dass die Indexmenge A entweder endlich oder überabzählbar ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass X sonst von erster Kategorie in sich selbst wäre.)

2. **(4 Punkte) Konvergenz von linearen Abbildungen.** Seien X, Y Banachräume, und sei $(T_n)_{n=1}^\infty$ Folge in $L(X,Y)$. Für jedes $x \in X$ konvergiere die Folge $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ in Y, der Grenzwert werde mit Tx bezeichnet. Zeigen Sie:

   a) $\sup_{n\geq 1} \|T_n\| < \infty$,

   b) $T \in L(X,Y)$,

   c) $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.

3. **(4 Punkte) Abgeschlossen aber nicht beschränkt.** Betrachten Sie den Raum der stetigen Funktionen $C[0,1]$, versehen mit der L^p-Norm, $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass der Graph der Identitätsabbildung

   $$\mathrm{id}\colon (C[0,1], \|\cdot\|_{L^p}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_{L^\infty})$$

   abgeschlossen ist, aber die Abbildung nicht beschränkt ist. Warum widerspricht dies nicht dem Satz vom abgeschlossenen Graphen?

4. **(4 + 2* Punkte) Abgeschlossen und damit endlichdimensional.** Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ endlichen Maßes, und sei $X \subset L^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Untervektorraum, sodass $X \subset L^\infty(\Omega)$.

   a) Verwenden Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen oder den Satz von der offenen Abbildung, um zu zeigen, dass es eine Konstante C gibt, sodass $\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^2}$ für jedes $u \in X$ gilt.

   b) Betrachten Sie eine orthogonale Menge $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset X$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante C' gibt, sodass $n \leq C'$. Folgern Sie, dass X endlichdimensional sein muss. (Hinweis: Für ein festes $x \in \Omega$, vergleichen Sie die L^2- und L^∞-Normen von $u \coloneqq u_1(x) \cdot u_1 + \cdots + u_n(x) \cdot u_n$.)

*) Können Sie dasselbe schließen, wenn $X \subset L^\infty(\Omega)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $L^p(\Omega)$ ist?