Blatt Nr. 6
Die schwach-$*$-Topologie

4. Juni 2025

Abgabe am 18. Juni 2025

1. **(4 Punkte) Schwach aber nicht schwach-$*$ abgeschlossen.** Es sei X ein nicht-reflexiver Banachraum. Konstruieren Sie eine Hyperebene H in X^*, die stark und schwach, aber nicht schwach-$*$ abgeschlossen ist. Können Sie auch eine Hyperebene konstruieren, die stark, aber nicht schwach abgeschlossen ist? (Hinweis: Verwenden Sie ein Funktional $f \in X^{**} \setminus J(X)$ und zeigen Sie, dass das Komplement von $\{f = 0\}$ nicht schwach-$*$ offen ist.)

2. **(4 Punkte) Lineare Funktionale in reflexiven Räumen.** Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass für alle $f \in X^*$ ein $x \in X$ existiert, sodass $\|x\| = 1$ und $f(x) = \|f\|$.

3. **(4 Punkte) Die schwache und schwach-$*$ Topologien in $\ell^\infty(\mathbf{N})$.** Sei $(e_n)_{n=1}^\infty \subset \ell^\infty(\mathbf{N})$ die Folge

$$e_n = \{e_n^k\}_{k=1}^\infty, \quad e_n^k := \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n=1}^\infty$ nicht schwach konvergent ist, aber $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$.

   b) Konstruieren Sie eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbf{N})$, sodass $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$, die aber keine schwach-$*$ konvergente Teilfolge besitzt. Gibt es einen Widerspruch zum Satz von Banach-Alaoglu?

4. **(4 Punkte) Ein Satz von Helly.** Zeigen Sie den folgenden Satz: Sei X ein Banachraum, $f_1, \dots, f_n \in X^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$. Dann sind äquivalent:

   a) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $x_\varepsilon \in X$ mit $\|x_\varepsilon\| \le 1$, sodass $|f_k(x_\varepsilon) - \alpha_k| < \varepsilon$, $k = 1, \dots, n$.

   b) Für alle $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbf{K}$, $|\sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k| \le \|\sum_{k=1}^n \beta_k f_k\|_{X^*}$.

   Hinweis: Für a) $\Rightarrow$ b) folgern Sie, dass $|\sum_{k=1}^n \beta_k f_k(x_k) - \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k| < C\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ (für ein geeignetes $C \in \mathbf{R}$) und schätzen dadurch die linke Seite in b) ab. Für b) $\Rightarrow$ a) behandeln Sie zunächst den reellen Fall. Bemerken Sie, dass die Aussage nichts anderes ist als $(\alpha_j)_{j=1}^n \in \overline{\varphi(B_1(0))}$ für $\varphi\colon X \to \mathbf{R}^n$, $\varphi(x) = (f_j(x))_{j=1}^n$ und führen Sie einen indirekten Beweis indem Sie α und $\overline{\varphi(B_1(0))}$ strikt trennen. Im Komplexen nutzen Sie wie üblich die Isometrie zwischen $\mathbf{R}^{2n}$ und $\mathbf{C}^n$.