FUNKTIONALANALYSIS
PROF. DR. PATRICK DONDL
DR. LUCIANO SCIARAFFIA

Blatt Nr. 7
Reflexive und separable Banachräume

18. Juni 2025

Abgabe am 25. Juni 2025

1. (4 Punkte) $\ell^1(\mathbf{N})$ ist nicht reflexiv. Sei $f\colon \ell^1(\mathbf{N}) \to \mathbf{R}$ definiert als

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n) \cdot x_n, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

a) Zeigen Sie, dass $f \in \ell^1(\mathbf{N})^*$ und berechnen Sie die Norm $\|f\|$.

b) Zeigen Sie, dass kein $x \in \ell^1(\mathbf{N})$ mit $\|x\| = 1$ existiert, sodass $|f(x)| = \|f\|$.

c) Folgern Sie, dass $\ell^1(\mathbf{N})$ nicht reflexiv ist.

2. (4 + 2* Punkte) Adjungierte Abbildungen und Reflexivität. Seien X, Y Banachräume und $A \in L(X,Y)$. Die adjungierte Abbildung $A^*\colon Y^* \to X^*$ ist definiert durch

$$(A^* f)(x) \coloneqq f(Ax) \quad x \in X, f \in Y^*.$$

Beweisen Sie:

a) A^* ist wohldefiniert, linear und stetig mit $\|A^*\|_{L(Y^*,X^*)} = \|A\|_{L(X,Y)}$.

b) Ist A bijektiv, so ist auch A^* bijektiv.

c) Ist A bijektiv, so gilt $J_Y = A^{**} \circ J_X \circ A^{-1}$, wobei $A^{**} = (A^*)^*\colon X^{**} \to Y^{**}$.

d) Ist A bijektiv und X reflexiv, so ist auch Y reflexiv.

$*$) Ist A eine bijektive Isometrie, so ist auch A^* eine bijektive Isometrie.

3. (4 Punkte) $\ell^1(\mathbf{N})$ und $\ell^\infty(\mathbf{N})$ als universelle Banachräume. Sei X ein separabler Banachraum.

a) Zeigen Sie, dass X, ohne Änderung der Norm, als ein Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbf{N})$ realisiert werden kann. Genauer gesagt, beweisen Sie, dass es eine lineare Abbildung $\iota\colon X \to \ell^\infty(\mathbf{N})$ gibt, sodass $\|\iota(x)\|_{\ell^\infty(\mathbf{N})} = \|x\|_X$ für alle $x \in X$.

b) Ein jeder solcher separabler Banachraum X kann auch als ein Quotientenvektorraum von $\ell^1(\mathbf{N})$ realisiert werden. Das heißt, es gibt eine lineare Surjektion $\pi\colon \ell^1(\mathbf{Z}) \to X$, sodass $\|\pi(x)\|_X = \inf_{y \in \ker \pi} \|x - y\|_{\ell^1(\mathbf{N})}$ für jedes

$x \in \ell^1(\mathbf{N})$. Dies gibt eine Identifikation von X mit dem Quotientenvektorraum $\ell^1(\mathbf{Z})/\ker \pi$.

(Hinweis: Für a), sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine dichte Menge in X und sei $f_n \in X^*$ so, dass $\|f_n\| = 1$ und $f_n(x_n) = \|x_n\|$. Wenn $x \in X$, setzen Sie $\iota(x) := \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Für b), wenn $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbf{N})$ definieren Sie $\pi(y) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n / \|x_n\|$.)

4. (4 + 4* Punkte) Nichtmetrisierbarkeit der schwachen Topologie. Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Wir zeigen durch ein Widerspruchsargument, dass keine Metrik $d\colon X \times X \to \mathbf{R}$ existiert, welche die schwache Topologie induziert. Nehmen wir also an, d wäre eine solche Metrik.

a) Für $k \in \mathbf{N}$, sei V_k eine Umgebung des Ursprungs bezüglich der schwachen Topologie, so dass
$$V_k \subset \{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{k}\}.$$
Zeigen Sie, dass eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ in X^* existiert, sodass jedes $g \in X^*$ als *endliche* Linearkombination von Folgengliedern f_n geschrieben werden kann.

b) Folgern Sie, dass X^* von endlicher Dimension ist. (Hinweis: Benutzen Sie das Bairesche Kategorienargument.)

c) Zeigen Sie den Widerspruch.

$*$) Beweisen Sie mit einer ähnlichen Methode: X^* ist mit der schwach-$*$-Topologie nicht metrisierbar.