

Blatt Nr. 8 L^p -Räume, II

25. Juni 2025

Abgabe am 2. Juli 2025

1. (4 Punkte) Gleichmäßige Konvexität von L^p , I. Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Beweisen Sie, dass für $2 \leq p < \infty$ die erste Ungleichung von Clarkson gilt:

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p)$$

für alle $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$.

b) Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mu)$ für $2 \leq p < \infty$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum ist.

2. (4 Punkte) Gleichmäßige Konvexität von L^p , II. Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $1 < p < \infty$. Beweisen Sie, dass es eine Konstante C (die nur von p abhängt) gibt, sodass

$$|x-y|^p \leq C (|x|^p + |y|^p)^{1-p/2} \left(|x|^p + |y|^p - 2 \left| \frac{x+y}{2} \right|^p \right)^{p/2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbf{R}.$$

b) Folgern Sie, dass $L^p(\Omega, \mu)$ für $1 < p \leq 2$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum ist.

3. (4 Punkte) Die Einheitskugel in L^p . Beweisen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel von $L^1(0, 1)$ keine Extrempunkte besitzt. Das heißt, jedes $f \in L^1(0, 1)$ mit $\|f\|_{L^1(0,1)} = 1$ kann als konvexe lineare Kombination $f = \lambda g + (1 - \lambda)h$ geschrieben werden, $0 < \lambda < 1$, $\|g\|_{L^1(0,1)} = \|h\|_{L^1(0,1)} = 1$. Andererseits ist jedes $f \in L^p(0, 1)$, mit $\|f\|_{L^p(0,1)} = 1$, $1 < p < \infty$, ein Extrempunkt der Einheitskugel in $L^p(0, 1)$.

4. (4 + 2* Punkte) Der Dualraum der Summe. Seien $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

a) Betrachten Sie $L^p \cap L^q$ ausgestattet mit

$$\|f\|_{L^p \cap L^q} = \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^q}$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L^p \cap L^q}$ eine Norm ist, und dass $L^p \cap L^q$ (mit dieser Norm) ein Banachraum ist.

- b) Angenommen, $L^p + L^q$ ist definiert als der Vektorraum der messbaren Funktionen f auf Ω , die als Summe $f = f_0 + f_1$ mit $f_0 \in L^p$ und $f_1 \in L^q$ geschrieben werden können. Betrachten Sie

$$\|f\|_{L^p + L^q} = \inf \{ \|f_0\|_{L^p} + \|f_1\|_{L^q} \}$$

wobei das Infimum über alle Zerlegungen $f = f_0 + f_1$ mit $f_0 \in L^p$ und $f_1 \in L^q$ genommen wird. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L^p + L^q}$ eine Norm ist, und dass $L^p + L^q$ (mit dieser Norm) ein Banachraum ist.

- c) Sei $1 < p < q < \infty$. Zeigen Sie, dass es einen linearen isometrischen Isomorphismus $(L^p + L^q)^* \simeq L^{p'} \cap L^{q'}$ gibt.
- *) Sei $1 < p < q < \infty$. Zeigen Sie, dass es einen linearen isometrischen Isomorphismus $(L^p \cap L^q)^* \simeq L^{p'} + L^{q'}$ gibt. (Hinweis: Betten Sie $L^p \cap L^q$ als abgeschlossenen Untervektorraum der direkten Summe $L^p \oplus L^q$ ein und verwenden Sie den Satz von Hahn-Banach.)