Funktionalanalysis
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Luciano Sciaraffia

Blatt Nr. 9
Hilberträume

2. Juli 2025

Abgabe am 9. Juli 2025

1. (4 Punkte) Die Banach-Saks-Eigenschaft. Seien H ein Hilbertraum und $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ eine Folge.

a) Nehmen Sie an, dass $x_n \rightharpoonup 0$ schwach konvergiert. Konstruieren Sie durch Induktion eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, sodass $x_{n_1} = x_1$ und

$$|(x_{n_j}, x_{n_k})| \leq \frac{1}{k}, \quad \text{für jedes} \quad k \geq 2, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Folgern Sie, dass $s_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k} \to 0$ stark konvergiert, wenn $N \to \infty$. (Hinweis: Schätzen Sie $|s_N|^2$ ab.)

b) Nehmen Sie an, dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist. Beweisen Sie, dass es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ gibt, sodass $s_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$ stark konvergent ist, wenn $N \to \infty$.

2. (4 Punkte) Projektion in Hilberträumen. Sei H ein komplexer Hilbertraum, sei weiter $K \subset H$ abgeschlossen, nichtleer, konvex und $f \in H$. Zeigen Sie, dass:

a) Ein eindeutiges $u \in K$ existiert, sodass

$$\|u - f\| = \min_{v \in K} \|v - f\|;$$

b) $\operatorname{Re}(f - u, v - u) \leq 0$ für alle $v \in K$ ist;

c) Ist $K \subset H$ außerdem ein abgeschlossener Untervektorraum, so ist weiterhin $(f - u, v) = 0$ für alle $v \in K$.

3. (4 Punkte) Projektionen auf monotone Folgen von Mengen. Sei H ein komplexer Hilbertraum.

a) Sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge von abgeschlossenen konvexen Mengen in H, sodass $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in H$ die Folge $u_n = P_{K_n} f$ stark konvergent ist und identifizieren Sie den Grenzwert.

b) Sei $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton wachsende Folge von nichtleeren abgeschlossenen konvexen Mengen in H. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in H$ die Folge $u_n = P_{K_n} f$ stark konvergent ist und identifizieren Sie den Grenzwert.

4. (4 Punkte) Eine Beispielprojektion. Sei $h\colon (0,1) \to [0,\infty)$ ein messbare Funktion. Betrachten Sie die Menge

$$K \coloneqq \{u \in L^2(0,1) : |u(x)| \leq h(x) \text{ fast alle } x \in (0,1)\}.$$

Zeigen Sie, dass $K \subset L^2(0,1)$ abgeschlossen, nichtleer und konvex ist. Berechnen Sie die Projektion P_K.