Blatt Nr. 10 Hilberträume II, kompakte Operatoren

9. Juli 2025

Abgabe am 16. Juli 2025

1. (4 Punkte) **Die Haar-Wavelet-Basis.** Sei $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ die Funktion

$$\psi(x) := \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $n, k \in \mathbf{Z}$, definieren wir

$$\psi_{n,k}(x) := 2^{n/2} \psi(2^n x - k), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\{\psi_{n,k} : n, k \in \mathbf{Z}\}$ eine Orthonormalbasis für $L^2(\mathbf{R})$ ist.

2. (4 Punkte) **Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren.** Sei $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ ein σ -endlicher Maßraum. Sei weiter $k \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$, und betrachten Sie die lineare Abbildung

$$(Tu)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)u(y) dy, \quad \text{für fast alle } x \in \Omega, \quad u \in L^2(\Omega, \mu).$$

Beweisen Sie, dass $T: L^2(\Omega, \mu) \rightarrow L^2(\Omega, \mu)$ kompakt ist. (Hinweis: Approximieren Sie k mit einfachen Funktionen. Was ist die Dimension des Bildes der zugehörigen Integraloperatoren?)

3. (4 Punkte) **Kompakte Diagonaloperatoren.** Seien $1 \leq p \leq \infty$ und $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}(\mathbf{N})$ eine beschränkte Folge. Wir definieren die lineare Abbildung

$$T_{\lambda}x := \{\lambda_n x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbf{N}).$$

Zeigen Sie, dass $T_{\lambda} \in L(\ell^p(\mathbf{N}))$ genau dann kompakt ist, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

4. (4 Punkte) **Schwache Konvergenz und kompakte Operatoren.** Seien X, Y Banachräume. Sei weiter $T \in L(X, Y)$, und nehmen Sie an, dass X reflexiv ist.

a) Zeigen Sie, dass T genau dann kompakt ist, wenn für jede schwach konvergente Folge $x_n \rightharpoonup x$ in X , $Tx_n \rightarrow Tx$ stark in Y .

b) Folgern Sie, dass jede Abbildung $T \in L(X, \ell^1(\mathbf{N}))$ oder $T \in L(c_0(\mathbf{N}), X)$ kompakt ist. (Hinweis: Bedenken Sie, dass $c_0(\mathbf{N})^* \simeq \ell^1(\mathbf{N})$ gilt.)