Funktionalanalysis
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Luciano Sciaraffia

Blatt Nr. 11
Klausurvorbereitung

21. Juli 2025

Nicht weniger als eine der folgenden vier Aufgaben wird in der Klausur verwendet werden.

1. Monotone lineare Operatoren. Sei X ein Banachraum und $T\colon X \to X'$ eine lineare Abbildung, sodass

$$(Tx)(x) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Zeigen Sie, dass T stetig ist. (Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.)

2. Isometrische lineare Fortsetzungen. Seien $p \in [1, \infty)$ und

$$G := \{u \in L^p(\mathbf{R}) : u(x) = 0 \text{ für fast alle } x \leq 0\}.$$

Sei weiter $f \in G'$.

a) Für $p > 1$, zeigen Sie, dass ein eindeutiges Funktional $F \in L^p(\mathbf{R})'$ existiert, sodass
$$F|_G = f, \quad \|F\|_{L^p(\mathbf{R})'} = \|f\|_{G'}.$$

b) Zeigen Sie, dass die vorherige Aussage für $p = 1$ falsch ist, und finden Sie alle die isometrischen (d.h. $\|F\|_{L^1(\mathbf{R})'} = \|f\|_{G'}$) Fortsetzungen $F \in L^1(\mathbf{R})'$ von f.

3. Fourierreihe. Sei $\mathbf{T} := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, und betrachten Sie die Funktionen

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad x \in \mathbf{T}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Zeigen, dass $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ eine Orthonormalbasis für $L^2(\mathbf{T})$ ist. Befolgen Sie dazu die Schritte:

a) Beweisen Sie, dass $\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbf{T})$ ist.

b) Beweisen Sie, dass $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ dicht in $C(\mathbf{T})$ bezüglich der Supremumsnorm ist. (Hinweis: Satz von Stone-Weierstraß.)

c) Beweisen Sie, dass $\operatorname{span}\{e_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ dicht in $L^2(\mathbf{T})$ ist, und folgern Sie das gewünschte Resultat.

4. Kompakte Operatoren und Normen. Seien X, Y Banachräume mit Normen $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, und $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ ein kompakter Operator. Sei weiter $|\cdot|$ eine schwächere Norm auf X, das heißt, es gibt eine Konstante $C > 0$ so dass $|x| \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

a) Nehmen Sie an, dass X reflexiv ist. Zeigen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$\|Tx\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X + C_\varepsilon|x| \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

b) Zeigen Sie die obige Aussage für injektive T und nicht reflexive X.

Weitere Klausuraufgaben könnten so aussehen:

5. Reflexive Banachräume sind „schwach-folgen-vollständig". Sei X ein reflexiver Banachraum. Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in X, so dass für jedes $f \in X'$, $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ konvergent ist. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=1}^\infty$ schwach konvergent ist.

6. Ein Stetigkeitskriterium. Seien X, Y Banachräume und $T\colon X \to Y$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass T genau dann stetig ist, wenn $\left(T^{-1}(\overline{B_Y})\right)^\circ$ (also das offene Innere vom Urbild der abgeschlossenen Einheitskugel in Y) nicht leer ist.