Albert-Ludwigs-Universität Freiburg WS 2015/16
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Johannes Daube
Hannes Eberlein

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 12
Abgabe: 26. Januar 2016 für Aufgaben 43–45
Abgabe: 2. Februar 2016 für Aufgaben 46–48

Bitte am 26. Januar in das Fach 6 des Briefkastens im 2. Stock Hermann-Herder-Str. 10 einwerfen.

Hinweis: Wir nehmen immer an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen ist sowie einen glatten Rand besitzt. Weiters sind alle Lagrangefunktionen glatt.

Aufgabe 43 (4 Punkte)**.** *Determinanten*

Es sei $\eta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

i) Zeigen Sie, dass $L(P,z,x) = \eta(z) \det P$ $(P \in \mathbb{R}^{n\times n},\ z \in \mathbb{R}^n)$ eine Nulllagrangefunktion darstellt.

ii) Zeigen Sie, dass für eine $C^2 - Funktion\ u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_\Omega \eta(u)\ \det \nabla u \,\mathrm{d}x$$

nur von $u|_{\partial\Omega}$ abhängt.

Aufgabe 44 (4* Punkte)**.** *Der Abbildungsgrad (Fortsetzung von Aufgabe 43)*

Es sei $x_0 \notin u(\partial\Omega)$ gegeben sowie η eine Funktion wie oben, so dass $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \,\mathrm{d}z = 1$ und für den Träger von η gilt $\operatorname{spt}\eta \subset B_r(x_0)$ mit r hinreichend klein so dass $B_r(x_0) \cap u(\partial\Omega) = \emptyset$. Wir definieren den Abbildungsgrad von u bezüglich x_0 als

$$\deg(u, x_0) = \int_\Omega \eta(u) \det \nabla u \,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $\deg(u, x_0)$ ganzzahlig ist.

Aufgabe 45 (4 Punkte)**.** *Gauss-Bonnet*

Es sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ der Graph einer glatten Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Es gilt, dass

$$\int_\Omega (1 + |\nabla u|^2)^{-\frac{3}{2}}\ \det \nabla^2 u \,\mathrm{d}x$$

das Integral der Gausskrümmung über Σ darstellt. Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck nur von $\nabla u|_{\partial\Omega}$ abhängt.

Aufgabe 46 (4 Punkte)**.** *Spur (einer Matrix)*

Zeigen Sie, dass

$$L(P) = \operatorname{tr}(P^2) - \operatorname{tr}(P)^2 \quad (P \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

für Funktionen $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $P = \nabla u$, eine Nulllagrangefunktion darstellt.

Aufgabe 47 (4 Punkte)**.** *Unterhalbstetigkeit*

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $L(u) = \int_0^1 1 + (u'(x))\,\mathrm{d}x$ zwar folgen-unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}((0,1))$, $p \in (0,1)$ aber nicht stetig bezüglich dieser Konvergenz ist.

Aufgabe 48 (4 Punkte)**.** *Minimierer und Lösungen*

Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L(p,z,x)$ für skalarwertige Funktionen mit der Eigenschaft, dass die Abbildung

$$(p,z) \mapsto L(p,z,x)$$

konvex ist für jedes $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall jede schwache Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung (mit Nullrandbedingungen) auch ein Minimum der zugehörigen Energie ist.