Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl WS 2015/16

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 1
Abgabe: 27. November 2015

Classics

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Schwache Konvergenz in $W^{1,p}$*

(i) Seien X und Y Banachräume. Dann ist $Z = X \times Y$ ein Banachraum mit der Norm $||(x,y)||_Z = ||x||_X + ||y||_Y$. Zeigen Sie: Für jedes $z' \in Z'$ gibt es genau ein $x' \in X'$ und ein $y' \in Y'$ mit $z'((x,y)) = x'(x) + y'(y) \quad \forall x \in X, y \in Y$. Folgern Sie, dass

$$(x_n, y_n) \rightharpoonup (x,y) \text{ in } Z \iff x_n \rightharpoonup x \text{ in } X,\ y_n \rightharpoonup y \text{ in } Y.$$

(ii) Sei X ein Banachraum, Y ein abgeschlossener Unterraum. Sei y_n eine Folge in Y.
Zeigen Sie:

$$y_n \rightharpoonup y \text{ in } Y \iff y_n \rightharpoonup y \text{ in } X.$$

(iii) Seien X und Y Banachräume. Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ (stetige lineare Abbildung von X nach Y) invertierbar mit stetiger Umkehrung. Zeigen Sie:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X \iff Tx_n \rightharpoonup Tx \text{ in } Y.$$

(iv) Sei $1 < p < \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: $W^{1,p}(\Omega)$ ist reflexiv und

$$f_n \rightharpoonup f \text{ in } W^{1,p}(\Omega) \iff f_n \rightharpoonup f \text{ in } L^p(\Omega) \text{ und } \partial_i f_n \rightharpoonup \partial_i f \text{ in } L^p(\Omega),\ i \in \{1,\dots,n\}.$$

Tipp: Für (iv) betrachten Sie eine geeignete Einbettung von $W^{1,p}(\Omega)$ in einen Unterraum von $L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$ ($n+1$ Kopien) und verwenden Sie (i)–(iii).

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Poissongleichung im Hilbertraum*

Betrachten Sie den Hilbertraum $H_0^1 := W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R})$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

i) Zeigen Sie, dass die bilineare Abbildung $(\cdot,\cdot)\colon W_0^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

ein Skalarprodukt auf H_0^1 darstellt, welches eine zur üblichen Norm in $W_0^{1,2}$ äquivalente Norm induziert.

ii) Sei $f \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Es gibt genau ein $\bar{u} \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R})$, so dass gilt

$$\int_\Omega \nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Orthonormalbasis in Hilberträumen*

Es sei (w_n) eine Orthonormalbasis eines Hilbertraumes H.

i) Zeigen Sie, dass gilt $w_n \rightharpoonup 0$.

ii) Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge und $u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i w_i$.
Zeigen Sie, dass gilt $||u_n||_H \to 0$.

iii) Zeigen Sie, dass gilt $\sqrt{n}\, u_n \rightharpoonup 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Die Grönwall'sche Ungleichung*

Es sei $x(t)$ eine nicht-negative und stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\le c_1 x(t) + f(t) \quad \text{für } 0 < t \le T, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\max_{t\in[0,T]} x(t) \le C(c_1, x_0, f)$$