Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl

WS 2015/16

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 10

Abgabe: 12. Januar 2016

Schöne Feiertage!

Aufgabe 36 (4* Punkte)**.** *Energieabschätzung für die Allen-Cahn-Gleichung*

Es sei $E_\varepsilon(u) = \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u)\,\mathrm{d}x$ mit $W(s) = \frac{1}{4}(s^2-1)^2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand. Zeigen Sie für Lösungen der Allen-Cahn-Gleichung

$$\begin{aligned} \epsilon u_t - \epsilon\Delta u &= -\frac{1}{\epsilon}W'(u) \quad \text{in } \Omega\times(0,T] \\ u &= -1 \quad \text{on } \partial\Omega\times(0,T] \\ u &= g \quad \text{on } \Omega\times\{t=0\} \end{aligned}$$

mit $T > 0$ und glatter Anfangsbedingung g die Energieabschätzung

$$E_\varepsilon(u(\cdot,t)) \leq E_\varepsilon(u(\cdot,0))$$

für $t > 0$ gilt.

Hinweis: Sie können annehmen, dass die Lösungen glatt sind.

Aufgabe 37 (4* Punkte)**.** *Maximumsprinzip für die Allen-Cahn-Gleichung*

Es sei u eine schwache Lösung der Gleichung aus Aufgabe 36 mit $|g(x)| \leq 1$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass gilt $|u(x,t)| \leq 1$ für $t > 0$ und $x \in \Omega$.

Tipp: Schneiden Sie die Lösung u bei ± 1 ab und betrachten Sie die Gebiete $|u| \leq 1$ und $|u| > 1$ separat. Stellen Sie dann eine Gleichung auf für die abgeschnittene Funktion und die Originallösung und zeigen Sie, dass diese Differenz für alle Zeiten Null bleibt.

Aufgabe 38 (4* Punkte)**.** *Zur Einstimmung auf Teil II*

Es sei $E(u) = \int_0^1 ((u'(x))^2-1)^2 + u^2(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass keine Funktion $u \in H_0^1((0,1))$ existiert, so dass

$$E(u) = \inf_{v\in H_0^1((0,1))} E(v).$$

Anmerkung: Auch in keinem anderen $W_0^{1,p}$ existiert ein Minimierer.