Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl WS 2015/16

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 11
Abgabe: 19. Januar 2016

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** *Lagrangian*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene glatte Funktion. Finden Sie eine Lagrangefunktion $L(p, z, x)$, so dass die PDG

$$-\Delta u + \nabla\phi \cdot \nabla u = f \quad \text{in } \Omega$$

die zum Funktional $I(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\,\mathrm{d}x$ gehörige Euler-Lagrange-Gleichung ist.

Tipp: Suchen Sie nach einer Lagrangefunktion, der einen exponentiellen Term enthält.

Aufgabe 40 (4 Punkte)**.** *Konvexe Funktionen*

a) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare, konvexe Funktion (in dem Sinne, dass $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ für $x, y \in A$, $\lambda \in [0,1]$). Zeigen Sie, dass gilt

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

b) Nun sei $f\colon \overline{A} \to \mathbb{R}$ nur unterhalbstetig und konvex. Zeigen Sie, dass zu jedem $x \in A$ ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(y) \geq f(x) + b \cdot (y - x) \quad \text{für alle } y \in A.$$

c) Wie sieht eigentlich eine nicht unterhalbstetige konvexe Funktion aus?

Hinweis: Teil b) ist etwas schwerer, Sie können zum Beispiel einen Trennungssatz benutzen.

Aufgabe 41 (4 Punkte)**.** *Schwache Konvergenz*

i) Zeigen Sie, dass die Folge $u_k(x) = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ schwach in $L^2((0,1))$ gegen die Nullfunktion für $k \to \infty$ konvergiert.

ii) Finden Sie zwei Folgen $(u_k)_{k=1}^\infty$, $(v_k)_{k=1}^\infty$, so dass (für ein $p > 4$)

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{in } L^p(0,1)$$

und

$$v_k \rightharpoonup v \quad \text{in } L^p(0,1)$$

konvergiert aber das punktweise Produkt

$$u_k v_k \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(0,1)$$

konvergiert mit

$$w \neq uv.$$

Aufgabe 42 (4 Punkte)**.** *Satz von Egorov*

Zeigen Sie den folgenden Satz: Es sei $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ eine Folge messbarer Funktionen, so dass

$$f_j \to f \quad \text{auf } A$$

mit $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $|A| < \infty$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Gebiet $E_\varepsilon \subset A$ so dass

(i) $|A \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$

und

(ii) $f_j \to f \quad$ gleichmäßig auf E_ε.

Tipp: Betrachten Sie die Mengen

$$E_{n,k} = \bigcup_{m \geq n} \left\{ x \in A : |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$