Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl WS 2015/16

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 2
Abgabe: 3. November 2015

Gelfand und Bochner

Aufgabe 5 (4 Punkte). *Gelfand-Tripel*

Es sei $V \subset H \cong H' \subset V'$ ein Gelfand'sches Tripel, mit V reflexiv. Wir definieren einen Operator $T\colon H \to V'$ durch

$$\langle Tf, u\rangle_V = (f, u)_H.$$

Zeigen Sie, dass T die folgenden Eigenschaften hat:

i) $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$
ii) T ist injektiv.
iii) $T(H)$ liegt dicht in V'.

Aufgabe 6 (4 Punkte). *Riemann-Integral und Bochner-Integral.*

Es sei X ein separabler, reflexiver Banachraum, $S \subset \mathbb{R}$ ein offenes und beschränktes Intervall. Es sei $f\colon S \to X$ eine stetige und beschränkte Funktion $f \in C(\overline{S}; X)$. Zeigen Sie, dass das Riemann-Integral und das Bochner-Integral von f über S übereinstimmen (und beide wohldefiniert sind).

Aufgabe 7 (4 Punkte). *Hölder-Ungleichung.*

Sei $S \subset \mathbb{R}$ offen, X ein separabler, reflexiver Banachraum. Es sei $f \in L^p(S; X)$, $g \in L^{p'}(S, X')$ mit $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Zeigen Sie: $\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle \in L^1(S, \mathbb{R})$ und

$$\int_S \langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle \leq ||g||_{L^{p'}(S,X')} \, ||f||_{L^p(S,X)} \,.$$

Tipp: Approximieren Sie durch Treppenfunktionen.

Aufgabe 8 (4 Punkte). *Dichtheit von $C([0,T]; X)$ in $L^p((0,T); X)$.*

Es sei X ein (reflexiver, separabler) Banachraum. Zeigen Sie, dass $C([0,T]; X)$, also die stetigen Funktionen mit Werten in X, dicht liegen in $L^p((0,T); X)$, $1 \leq p < \infty$.