Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl WS 2015/16

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 3
Abgabe: 10. November 2015

Ableitungen

Aufgabe 9 (4 Punkte). *Der Lebesguesche Differenziationssatz.*
Es sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (reellwertig). Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \left| \int_{B_r(x)} u(\xi) - u(x)\, \mathrm{d}\xi \right| = 0.$$

Tipp: Es ist am einfachsten, die Standardabschätzung der Hardy-Littlewood-Maximalfunktion zu benutzen: $\left|\left\{x : \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |u(\xi)|\, \mathrm{d}\xi > \lambda\right\}\right| < \frac{C}{\lambda} ||u||_{L^1}$. Für einen Beweis siehe z.B. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Thm. 2.8.2. Zum Beweis des Satzes approximieren Sie u durch eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger und zerlegen Sie den Term im Integral zu

$$\int_{B_r(x)} u(\xi) - u(x)\, \mathrm{d}\xi = \int_{B_r(x)} u(\xi) - g(\xi)\, \mathrm{d}\xi + \int_{B_r(x)} g(\xi) - g(x)\, \mathrm{d}\xi + |B_r(x)|\,(g(x) - u(x)).$$

Sie können dann folgern, dass die Menge der Punkte x, auf der die Differenz im Lemma größer als eine beliebige positive Zahl ist, eine Nullmenge ist.

Aufgabe 10 (4 Punkte). *Fast überall Differenzierbarkeit.*
Es sei $u \in L^1((0,T))$ (reellwertig), $v(t) = \int_0^t u(s)\, \mathrm{d}s$. Zeigen Sie, dass v fast überall differenzierbar ist mit Ableitung u.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 9.

Aufgabe 11 (4 Punkte). *Verallgemeinerte Ableitung.*
Es sei X ein (wie üblich reflexiver, separabler – was aber beides hier nicht notwendig ist) Banachraum. Zu $u \in L^1((0,T);X)$ setzen wir

$$v(t) = \int_0^t u(s)\, \mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_0^T v(t)\varphi'(t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^T u(t)\varphi(t)\, \mathrm{d}t \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,T);\mathbb{R}).$$

Hinweis: Es ist auch möglich, ein Analogon von Aufgabe 10 für Banachraumwertige Funktionen zu zeigen – dies ist jedoch etwas aufwendiger.

Aufgabe 12 (4 Punkte). *Variation.*
Es sei $u \in L^p((0,T);X)$, X wie oben, $1 \le p < \infty$ und für alle $\varphi \in C_c^\infty((0,T);\mathbb{R})$ gelte

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t) = 0.$$

Folgern Sie, dass gilt $u(t) = c \in X$ f.f.a. $t \in (0,T)$.

Tipp: Sie benötigen ein Variationslemma: Falls $\int_0^T \phi u = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty$, dann gilt $u = 0$. Approximieren Sie dazu zunächst u durch eine Treppenfunktion, die nur auf Intervallen lebt.