Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Johannes Daube
Hannes Eberlein

WS 2015/16

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 5

Abgabe: 24. November 2015

AC-Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

Hinweis: Dieses Übungsblatt ist optional und gibt Extrapunkte (gekennzeichnet durch einen Asterisk an den Aufgaben). Für allgemeine Informationen zum Thema AC-Funktionen empfehle ich das Buch von Giovanni Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces*, AMS (2009). Im Prinzip funktioniert mit AC-Funktionen das meiste alles genau so wie mit stetig differenzierbaren Funktionen, seien Sie aber hier in jedem Schritt vorsichtig, dass die verwendeten Operationen auch zulässig sind.

Aufgabe 17 (4* Punkte)**.** $AC \subset C$

Zeigen Sie, dass absolut stetige ("AC")-Funktionen u (d.h., Funktionen u im Sinne von Aufgabe 10 für die gilt $u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ mit $f \in L^1$, $u_0 \in \mathbb{R}$) stetig sind und die Abschätzung gilt

$$\sup_{0 \le t \le T} |u(t)| \le \|f\|_{L^1((0,T))} + |u_0|.$$

Hinweis: Die hier verwendete Definition für AC-Funktionen ist nicht die selbe wie in *A First Course in Sobolev Spaces*, aber äquivalent (siehe Theorem 3.30 und Lemma 3.31 dort).

Aufgabe 18 (4* Punkte)**.** *Grönwall Redux*

Vergewissern Sie sich, dass die Grönwall'sche Ungleichung von Aufgabe 4 auch gilt für nichtnegative, absolut stetige Funktionen x, für welche die Abschätzung an die Ableitung nur fast überall gilt für ein $f \in L^1((0,T))$.

Aufgabe 19 (4* Punkte)**.** *Picard-Iterationen*

Es sei $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine (zeitabhängige) Matrix mit L^∞-Koeffizienten, weiter sei $f \in L^1([0,T);\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + f(t) \quad \text{für fast alle } t \in [0,T] \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung im Raum der absolut stetigen Funktionen $AC([0,T];\mathbb{R}^n)$ besitzt.

Hinweis: Picard-Iterationen funktionieren wie gehabt, die Grönwall'sche Ungleichung liefert sowohl die Abschätzung für Existenz auf dem gesamten Gebiet als auch Eindeutigkeit.

Aufgabe 20 (4* Punkte)**.** *Energieabschätzung*

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u(t) = \sum_{j=1}^n d_n^j(t) w_j$ mit $w_j \in H_0^1(\Omega)$ und $d_n^j(t) \in AC([0,T];\mathbb{R})$. Vergewissern Sie sich, dass gilt $(u(t), u'(t)) = \frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2$ (f.f.a. $t \in [0,T]$).