Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — WS 2015/16
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Johannes Daube
Hannes Eberlein

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 6
Abgabe: 1. Dezember 2015

Ohne Orthogonalität

Für die folgenden Aufgaben gelte $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$, $I = [0,T)$, $f \in L^2(I, L^2(\Omega))$, $g \in L^2(\Omega)$. Weiters seien $a^{ij} = a^{ji}, b^i, c$ L^∞-Funktionen auf $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, so dass der Differentialoperator L, gegeben durch $Lu = -\sum_{ij}(a^{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_i b^i u_{x_i} + cu$ gleichmäßig parabolisch ist. Die Bilinearform $B\colon H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times I \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $B(u,v;t) = \int_\Omega \sum_{ij} a^{ij}\, u_{x_i} v_{x_j} + \sum_i b^i\, u_{x_i} v + c\, uv$.

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** *Die rechte Seite*

Es sei $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge linear unabhängiger, glatter H_0^1-Funktionen

$$w_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

mit $\|w_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$, welche den Raum $L^2(\Omega)$ aufspannen. Wir betrachten die in der Vorlesung vorgestellte Galerkin-Approximation, also Lösungen $u_m \in V_m = \operatorname{span}\{w_k\}_{k=1}^m$ von

$$(u_m', w_k)_{L^2(\Omega)} + B(u_m, w_k; t) = (f, w_k)_{L^2(\Omega)} \quad \text{f.f.a. } 0 \le t \le T \text{ und alle } 1 \le k \le m.$$

Wir haben bereits gesehen, dass unter diesen Voraussetzungen gilt, dass

$$\|u_m\|_{L^2(I;H_0^1(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)}).$$

Folgern Sie, dass für

$$\xi_m(t)\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\xi_m(t)\colon w \mapsto B(u_m(t), w; t)$$

die Abschätzung

$$\|\xi_m\|_{L^2(I;H^{-1}(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)})$$

gilt, was (nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge) ergibt, dass

$$\xi_m \rightharpoonup \xi \quad \text{schwach in } L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \text{ für ein } \xi \in L^2(I; H^{-1}(\Omega)).$$

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.** *Grenzübergang*

i) Zeigen Sie, dass (mit u (wieder nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge) als schwacher Limes der u_m und ξ aus Aufgabe 21) für jedes $\phi \in C_c^\infty(I)$ und jedes $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt, dass

$$-\int_0^T (u(t), w)_{L^2(\Omega)} \phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (\langle \xi(t), w\rangle_{H_0^1(\Omega)} + (f(t), w)_{L^2(\Omega)})\phi(t)\,\mathrm{d}t.$$

ii) Folgern Sie also, dass

$$u' + \xi = f \quad \text{in } L^2(I; H^{-1}(\Omega)),$$

wobei u' die verallgemeinerte Zeitableitung von u darstellt.

iii) Zeigen Sie, dass gilt

$$\|u'\|_{L^2(I;H^{-1}(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)}).$$

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** *Existenz*

i) Zeigen Sie, dass (für ξ, u wie oben) gilt

$$\langle \xi, v\rangle_{L^2(I;H_0^1(\Omega))} = \int_0^T B(u(t), v(t); t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für jedes } v \in L^2(I; H_0^1(\Omega)).$$

ii) Folgern Sie aus i) und den beiden vorhergehenden Aufgaben die Existenz einer schwachen Lösung unseres parabolischen Anfangs- und Randwertproblems.

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** *Eine Abschätzung für die Regularitätstheorie*

Es sei $w \in \operatorname{span}\{w_j\}_{j=1}^m$, $m \in \mathbb{N}$ mit w_j Eigenfunktionen des Laplace-Operators in $H_0^1(\Omega)$ für ein Gebiet Ω mit glattem Rand. Zeigen Sie, dass $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ existieren mit

$$\beta\|w\|^2_{H^2(\Omega)} \leq (Lw, -\Delta w)_{L^2(\Omega)} + \gamma\|w\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweis: Die Koeffizienten in L sind hier als glatt angenommen.