Albert-Ludwigs-Universität Freiburg WS 2015/16
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Johannes Daube
Hannes Eberlein

Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Blatt 7

Abgabe: 8. Dezember 2015

Regularität und Randwerte

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** *Innere Regularität I*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega_T = \Omega \times [0, T)$ für $T > 0$. Weiter sei L der übliche elliptische Operator

$$Lu = \sum_{i,j} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_i b^i u_{x_i} + cu$$

aus der Vorlesung mit im Ort glatten, zeitunabhängigen Koeffizienten a^{ij}, b^i, c. Die Funktion $f\colon \Omega_T \to \mathbb{R}$ sei glatt, $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sei eine L^2-Funktion.

Es sei $\tau > 0$ und $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Zeigen Sie, dass die schwache Lösung des parabolischen Anfangs- und Randwertproblems

$$\begin{aligned} u_t - Lu &= f \quad \text{in } \Omega_T, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0, T), \\ u &= g \quad \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

eine innere Abschätzung der Form

$$\|u\|_{L^2((\tau,T);H^2(\Omega_1))} \leq C(\|f\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2(\Omega)})$$

erfüllt, wobei C nur von den Parametern der Gleichung und von V abhängt.

Hinweis: Betrachten Sie $v = \zeta u$ für eine geeignete Abschneidefunktion ζ. Welche Gleichung wird gelöst von v?

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** *Innere Regularität II*

Zeigen Sie, unter den Annahmen von Aufgabe 25, auch die Abschätzungen für höhere Regularität von u auf $(\tau, T) \times \Omega_0$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)**.** *Kompatibilität*

Zeigen Sie, dass die Kompatibilitätsbedingungen notwendig sind um eine glatte Lösung auf ganz $\overline{\Omega_T}$ zu erhalten.

Hinweis: Sie können als Beispiel die Gleichung

$$u_t - \Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega_T = (0, 1) \times [0, 1)$$

mit Nullrand- und Anfangsbedingungen verwenden. Nehmen Sie an, Sie hätten eine glatte Lösung und betrachten Sie die in der Zeit abgeleitete Gleichung.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.** *Randwerte in der Simulation*

Betrachten Sie die Galerkin-Approximation der Wärmeleitungsgleichung wie in der MATLAB-Simulation `heat1.m` implementiert. Wie würden Sie andere Randbedingungen implementieren? Berechnen Sie den Beitrag von Randbedingungen zur rechten Seite der Gleichung im Sinne von Bemerkung 3.6 aus der Vorlesung.