Albert-Ludwigs-Universität Freiburg WS 2015/16
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Johannes Daube
Hannes Eberlein

**Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen**
Blatt 8
Abgabe: 15. Dezember 2015

**Aufgabe 29** (4 Punkte). *Matrizen*

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt sowie $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ eine Folge linear unabhängiger Funktionen in $H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die in der Galerkinapproximation für die Wärmeleitungsgleichung auftretenden Matrizen $A$ und $E$ mit Einträgen

$$A_{ij} = \int_\Omega w_i \, w_j \,\mathrm{d}x \quad i,j = 1,\dots,n$$

beziehungsweise

$$E_{ij} = \int_\Omega \nabla w_i \cdot \nabla w_j \,\mathrm{d}x \quad i,j = 1,\dots,n$$

positiv definit sind.

**Aufgabe 30** (4 Punkte). *Projektion*

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $r \geq 2$, $v \in H_0^1(\Omega) \cap H^r(\Omega)$ sowie $S_h$ ein Raum, der die Abschätzung

$$\inf_{w \in S_h} \{\|w - v\|_{L^2(\Omega)} + h\|\nabla w - \nabla v\|_{L^2(\Omega)}\} \leq Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega)}, \quad 1 \leq s \leq r \tag{1}$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass sowohl für die Ritzprojektion

$$(\nabla R_h v, w)_{L^2(\Omega)} = (\nabla v, \nabla w)_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } w \in S_h$$

als auch für die Interpolationsprojektion

$$I_h v(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v(P_j)\Phi_j(x)$$

mit zu einer Triangulierung ($n = 2$) gehörenden stückweise affinen Basisfunktionen $\Phi_j$ das Infimum in (1) modulo einer von $h$ unabhängigen Konstanten angenommen wird.
Sind das eigentlich wirklich beides Projektionen?

**Aufgabe 31** (4 Punkte). *Triangulierung*

Zeigen Sie die Abschätzung (1) für quasiuniforme Triangulierungen eines Gebietes mit glattem Rand.

**Aufgabe 32** (4 Punkte). *Konvergenz, experimentell*

Überprüfen Sie die in der Vorlesung gezeigte Konvergenzrate

$$\|U^n - u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^r \left( \|g\|_{H^r(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u_t\|_{H^r(\Omega)} \,\mathrm{d}s \right) + k \int_0^{t_n} \|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)} \,\mathrm{d}s, \quad n \geq 0,$$

für die Finite-Elemente-Approximation $U^n$ der Wärmeleitungsgleichung experimentell in dem Programm `heat_1.m`. Was ist in unserem Fall ein geeignetes $r$?

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie entweder Anfangsbedingungen, für die Sie eine analytische Lösung als Vergleich finden können oder vergleichen Sie die Konvergenz zu einer 'Referenzlösung' auf einem besonders feinen Gitter. Es genügt der Plot eines geeigneten Graphen als Abgabe.