

Numerik 1

Blatt 1

Abgabe: 2. November 2016

Konditionierung

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe).

Sei $\phi = f \circ g$ eine mathematische Aufgabe, wobei ‚ \circ ‘ für Verkettung zweier Funktionen steht und sei die durch g definierte Aufgabe schlecht konditioniert. Zeigen Sie, dass die Aufgabe ϕ im Allgemeinen ebenfalls schlecht konditioniert ist.

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe).

(i) Zeigen Sie, dass die Addition zweier nichtnegativer oder zweier nichtpositiver Zahlen gut konditioniert ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Multiplikation zweier von Null verschiedener Zahlen gut konditioniert ist.

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe).

Unter welchen Bedingungen an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Berechnung eines Schnittpunkts der beiden Geraden $x \mapsto ax + b$ und $x \mapsto cx + d$ ein gut konditioniertes Problem?

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe).

Zeigen Sie, dass das Finden der Anzahl der reellen Nullstellen eines quadratischen Polynoms kein wohlgestelltes Problem ist (wenn als Datum $d \in \mathbb{R}^3$ die Koeffizienten des Polynoms gegeben sind).

Aufgabe 5 (4 Punkte).

Wie lassen sich Auslöschungseffekte bei der praktischen Berechnung der Ausdrücke

$$\frac{1-2x}{1+2x} - \frac{1}{1+x}, \quad \frac{e^x-1}{x}$$

für $x \neq 0$ mit $|x| \ll 1$ vermeiden?

Aufgabe 6 (4 Punkte).

Studieren Sie die Konditionierung des folgenden Problems:

Finde x und y , sodass

$$\begin{aligned} x + dy &= 1, \\ dx + y &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte).

Diskutieren Sie die Konditionierung der Bestimmung von Nullstellen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sowie die Stabilität ihrer Berechnung mit der pq -Formel $x_{1,2} = -p/2 \pm (p^2/4 - q)^{1/2}$. Betrachten Sie besonders die Fälle $p^2 \sim 4q$ und $p^2 \gg 4|q|$.

Aufgabe 8 (4 Punkte).

Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 12:00 Uhr (mittags) am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.