Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1

Blatt 2

(Abgabe: 16. November 2016)

Matrixnormen

Aufgabe 9 (Präsenzaufgabe). *Eine inkompatible Matrixnorm*

Zeigen Sie, dass für $n > 1$ durch $\|A\| := \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$ eine Norm jedoch keine Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert wird.

Aufgabe 10 (4 Punkte). *Gleitkommarechnung*

Ein Rechner arbeite mit 10^9 Gleitkommaoperationen pro Sekunde und es seien drei Algorithmen mit Aufwand $\mathcal{O}(n), \mathcal{O}(n^3)$ bzw. $\mathcal{O}(n!)$ zur Lösung derselben Aufgabe gegeben.
Wieviele Sekunden, Stunden, Tage oder Jahre benötigen die Algorithmen etwa für die Problemgrößen $n = 10^k$ mit $k = 1, 2, \ldots 6$?

Aufgabe 11 (4 Punkte). *Eigenschaften der Operatornorm*

Seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und sei $\|\cdot\|_{\text{op}}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.
Zeigen Sie:

(1) $\|\cdot\|_{\text{op}}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(2) $\|A\|_{\text{op}} := \sup_{\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_n = 1\}} \|Ax\|_m = \inf\{c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n\ \|Ax\|_m \leq c\|x\|_n\}$.

(3) Für $A \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$, sodass $\|x\|_n \leq 1$ und $\|Ax\|_m = \|A\|_{\text{op}}$ folgt $\|x\|_n = 1$.

(4) Das Infimum und das Supremum in (2) werden angenommen.

Aufgabe 12 (4 Punkte). *Die induzierten l^p-Matrixnormen*

(1) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|x\|_p$ die l^p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|A\|_p$ die dazugehörige induzierte Matrixnorm auf $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$$

gilt.

(2) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Abschätzungen

$$n^{-1/2}\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq n^{1/2}\|A\|_2$$
$$n^{-1}\|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n\|A\|_\infty$$

gelten und geben Sie Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, die zeigen, dass sich die Abschätzungen nicht verbessern lassen (d.h. für jede dieser vier Ungleichungen und jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ finden Sie ein A, sodass Gleichheit gilt).

Aufgabe 13 (4 Punkte). *Die Frobeniusnorm*

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Frobeniusnorm definiert durch $\|A\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2$.
Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}.$$

Folgern Sie, dass die Frobeniusnorm mit der von der Euklidischen Norm induzierten Operatornorm verträglich ist in dem Sinne, dass

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{\mathcal{F}} \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

[Sie dürfen dazu die Identität $\operatorname{tr}(A^T A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ mit den (wohlgemerkt nichtnegativen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $A^T A$ verwenden.]