Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1

Blatt 3

(Abgabe: 30. November 2016)

Matrixfaktorisierungen

Aufgabe 14 (Präsenzaufgabe)**.** *Gruppeneigenschaften*

Zeigen Sie, dass die invertierbaren (bzw. normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, d.h. sind $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrizen mit $\det L_i \neq 0$ (bzw. $(L_i)_{jj} = 1$ für $j = 1,\dots,n$), so sind L_0^{-1} und L_1L_2 ebenfalls invertierbare (bzw. normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.** *Positiv definite Matrizen*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, d.h. es gelte $x^TAx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(1) Zeigen Sie, dass A regulär ist.
(2) Zeigen Sie, dass für alle $1 \le k \le n$ die $k \times k$-Untermatrix $A_k := (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ ebenfalls positiv definit ist.
(3) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.** *Diagonaldominante Matrizen*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Matrix, d.h. es gelte

$$\sum_{j=1,\dots,n,\ j\neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

(1) Zeigen Sie, dass die Teilmatrizen $A_k := (a_{ij}), 1 \le i,j \le k$, für $k = 1,2,\dots,n$ ebenfalls strikt diagonaldominant sind.
(2) Zeigen Sie, dass die Matrix A regulär ist.

Hinweis: Zeigen Sie zum Nachweis von (2), dass für eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\|Ax\| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, und folgern Sie daraus, dass A injektiv ist.

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** *Cholesky Zerlegung*

Sei $(v_1, v_2 \dots, v_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und sei $V = [v_1|v_2|\dots|v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(1) Zeigen Sie, dass $G := VV^T$ symmetrisch und positiv definit ist.
(2) Zeigen Sie, es existiert eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass für $W := LV$ die Identität $W^TW = \mathrm{Id}$ gilt.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** *Schurkomplement*

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $1 \le m \le n$, sodass die obere linke $m \times m$-Teilmatrix $A_{11} = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ ebenfalls regulär ist. Sei A zerlegt gemäss

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Schurkomplement $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ regulär ist und, dass A^{-1} gegeben ist durch

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Für den ersten Teil bemerken Sie, dass

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & S \end{bmatrix}$$

und benutzen die Determinantenformel für eine Blockdreiecksmatrix.