Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1

Blatt 4

(Abgabe: 14. Dezember 2016)

Gaußsches Eliminationsverfahren

Aufgabe 19 (Präsenzaufgabe)**.**

Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix, die den k-ten und p-ten Eintrag eines Vektors vertauscht, wobei $p > k$ gelte.

(1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie PA sowie AP.

(2) Sei nun $j < k$, $L = I_n - \ell_j e_j^T$ mit dem kanonischen Basisvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ und einem Vektor $\ell_j = [0, \dots, 0, l_{j+1,j}, \dots, l_{n,j}]^T$. Zeigen Sie, dass ein Vektor

$$\hat{\ell}_k = [0, \dots, 0, \hat{l}_{j+1,j}, \dots, \hat{l}_{n,j}]^T$$

existiert, sodass mit $\hat{L} = I_n - \hat{\ell}_j e_j^T$ die Identität $\hat{L} = PLP$ gilt.

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.**

Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren *ohne* Pivotsuche zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 16 & -4 & 3 \\ -3 & 20 & -22 & 0 \\ 1 & -16 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -24 \\ -45 \\ 20 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die LU-Zerlegung von A.

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.**

Verwenden Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren *mit* Pivotsuche zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie auch die PLU-Zerlegung von A.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.**

Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zur Bijektion $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ gehörende Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass $P^T = P^{-1}$ und

$$P^{-1} = [e_{\pi^{-1}(1)}, \dots, e_{\pi^{-1}(n)}],$$

wobei $\{e_k\}$ die kanonischen Basisvektoren sind.

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.**

Für $k = 1, 2, \dots, n-1$ sei $L^{(k)} = I_n - l_k e_k^T$ mit Vektoren $l_k = [0, \dots, 0, l_{k+1,k}, \dots, l_{n,k}]^T$ und es sei $\tilde{L} = L^{(n-1)} L^{(n-2)} \dots L^{(1)}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{L}^{-1} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} l_k e_k^T.$$