Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1

Blatt 5

(Abgabe: 11. Januar 2017)

QR Zerlegung

Aufgabe 24 (Präsenzaufgabe).

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung

$$t \mapsto \|A(x+ty) - b\|_2^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

und folgern Sie die Gaußche Normalengleichung, falls x eine Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems ist.

Aufgabe 25 (4 Punkte).

Eine Householder-Matrix $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ist für $v \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$ definiert durch $P = I_m - 2vv^T$.

(1) Zeigen Sie, dass $P = P^T$ und $P^{-1} = P$ gelten.
(2) Zeigen Sie, dass eine reelle $m \times m$ Householder-Matrix $m-1$ Eigenwerte mit dem Wert 1 und einen Eigenwert -1 hat.
(3) Konstruieren Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen für $m = 2, 3$ eine Householder-Matrix, die einen gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ auf ein Vielfaches von $e_1 \in \mathbb{R}^m$ abbildet.

Aufgabe 26 (4 Punkte).

Sei $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen. Die Minimierung von $x \mapsto \|D(Ax-b)\|_2^2$ realisiert beispielsweise eine unterschiedliche Gewichtung verschiedener Messergebnisse. Bestimmen Sie die zugehörige Normalengleichung.

Aufgabe 27 (4 Punkte).

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $A = QR$ eine QR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass R eine Cholesky-Zerlegung von A^TA definiert.

Aufgabe 28 (4 Punkte).

Bestimmen Sie mit Hilfe passender Householder-Transformationen eine QR-Zerlegung für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & -5 \\ 0 & 8 & 11 \end{bmatrix},$$

und lösen Sie damit die Gleichung $Ax = (1,1,1)^T$.