Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1

Blatt 6

(Abgabe: 25. Januar 2017)

Singulärwertzerlegung

Aufgabe 29 (Präsenzaufgabe)**.**
Zeigen Sie, dass, für alle Matrizen A, rank $A^TA =$ rank $AA^T =$ rank A gilt.

Aufgabe 30 (4 Punkte)**.**
Bestimmen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Berechnen Sie A^+ mit Hilfe der Singulärwertzerlegung sowie mittels der Identität $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$. Verwenden Sie A^+, um das durch A und $b = [4, 1, 2, 3]^T$ definierte Ausgleichsproblem zu lösen.

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.**

(1) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $V^\perp$ sein orthogonales Komplement. Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Matrix $P_V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert mit $P_V v = v$ für alle $v \in V$ und $P_V w = 0$ für alle $w \in V^\perp$.

(2) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass $A^+A = P_{(\ker\ A)^\perp}$ und $AA^+ = P_{\mathrm{ImA}}$.

Aufgabe 32 (4 Punkte)**.**
Seien $(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, Eigenwerte und zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass A die Darstellung $A = VDV^{-1}$ mit $V = [v_1, \dots, v_n]$ und $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ besitzt.

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.**

(1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2, \dots \geq \lambda_n$ und sei $v_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_2 = \max \left\{ \frac{x^TAx}{\|x\|_2^2} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \cdot v_1 = 0 \right\}.$$

(2) Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenvektor der symmetrischen Matrix A ist, wenn $\nabla r(x^*) = 0$ gilt mit der Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^TAx}{\|x\|_2^2}.$$