Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2016

Numerik 1

Blatt 7

(Abgabe: keine)

Iterative Lösungsmethoden

Aufgabe 34 (4 Punkte). *Spektralradius und Operatornorm*

Finden Sie eine Matrix mit verschwindendem Spektralradius aber gleichzeitig für jede Vektorraumnorm von Null verschiedener Operatornorm. Finden Sie dann eine Folge von Normen auf dem Vektorraum, so dass die dazugehörigen Operatornormen der Matrix gegen Null gehen.

Aufgabe 35 (4 Punkte).

Zeigen Sie, dass das durch $(D+U)x^{k+1} = -Lx^k + b$ definierte Iterationsverfahren im Fall einer irreduziblen und diagonaldominanten Matrix $A = U + D + L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für jeden Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.

Aufgabe 36 (4 Punkte). *Reduzibilität*

Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann reduzibel ist, wenn eine Permutationsmatrix $P \in \{0,1\}^{n\times n}$ existiert, so dass

$$PAP^\top = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Matrizen B_{11}, B_{12} und B_{22} gilt.

Aufgabe 37 (4 Punkte). *Kontraktion*

Konstruieren Sie eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die bezüglich einer Operatornorm eine Kontraktion ist und bezüglich einer anderen nicht.

Aufgabe 38 (4 Punkte). *QR*

Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch, bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe des charakteristischen Polynoms und vergleichen Sie die Ergebnisse.