

Praktikum zu Numerik 1

Blatt 6

(Abgabe: 1. Februar 2017)

Eigenwerte und Singulärwertzerlegung

Aufgabe 14 (6 Punkte). *Potenzmethode*

Implementieren Sie die von-Mises-Potenzmethode, um den kleinsten und größten Eigenwert sowie die zugehörigen Eigenvektoren der $n \times n$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

für $n = 4, 16, 64, 256$ zu approximieren. Benutzen Sie für die inverse Iteration das MATLAB-Kommando $x = B \setminus c$ zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Bx = c$. Verwenden Sie unterschiedliche Startvektoren und ein geeignetes Abbruchkriterium für die Iteration und bestimmen Sie die Fehler der Approximationen mit Hilfe der exakten Werte $\lambda_{\min} = 2 - 2 \cos(\pi/(n+1))$, $\lambda_{\max} = 2 + 2 \cos(n\pi/(n+1))$.

Aufgabe 15 (6 Punkte). *QR-Methode*

Verwenden Sie die MATLAB-Routine $[Q, R] = \text{qr}(A)$, um das QR-Verfahren zu implementieren und beenden Sie die Iteration, falls $\|A_k - A_{k+1}\|_2 / \|A_k\|_2 \leq 10^{-5}$ gilt. Was wären andere sinnvolle Abbruchkriterien? Approximieren Sie mit Ihrem Programm die Eigenwerte der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n = 4, 10, 20$ und $B, B^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -10 & 29 \\ -2 & -4 & 18 \\ -1 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

und diskutieren Sie die Voraussetzungen des Satzes über die Konvergenz des Verfahrens anhand dieser Beispiele.

Aufgabe 16 (4 Punkte). *Bildkompression*

In MATLAB kann die Singulärwertzerlegung einer Matrix A mit dem Befehl 'svd' berechnet werden. Für ein durch die Datei 'bild.jpg' definiertes Bild, kann eine Kompression der Graustufendarstellung mit den unten gezeigten Zeilen definiert werden. Für ein möglichst schönes Bild Ihrer Wahl, erklären Sie die einzelnen Zeilen des Programms und erweitern Sie es um eine Berechnung des Approximationsfehlers $\|X - X_{\text{comp}}\|_{\mathcal{F}}$. Wie beurteilen Sie das Verhältnis von Qualitätsverlust zur Reduktion des Speicheraufwands für verschiedene Werte von k ?

```
RGB = imread('bild.jpg');
G = rgb2gray(RGB);
D = double(G);
X = mat2gray(D);
figure(1);
subplot(1,2,1); imshow(X); title('Original');
[U,S,V] = svd(X);
for k = 5:5:size(U,1)
    X_comp = U(:,1:k)*S(1:k,1:k)*V(:,1:k)';
    subplot(1,2,2); imshow(X_comp);
    title(sprintf('Komprimiert, k=%i',k)); pause
end
```