

**Lineare Algebra 1**

Extrablatt

Abgabe: 25. Januar 2018

*Optionale Aufgaben*

**Aufgabe 44** (5\* Punkte). *Polynome*

Sei  $V$  der Raum der Polynome vom Grad höchstens 3 auf  $\mathbb{R}$ , mit Basis  $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i=1,\dots,4} = \{1, t, t^2, t^3\}$ . Wir betrachten die linearen Abbildungen

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \text{und} \quad G : V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f \mapsto (f(-1), f(0), f(1)).$$

- (i) Für  $i = 1, 2, 3, 4$ , bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten von  $F(b_i)$  bzgl. dem kanonischen Basisvektor  $e_1$  (von  $\mathbb{R}$ ), und von  $G(b_i)$  bzgl. der kanonischen Basisvektoren  $\{e_1, e_2, e_3\}$  (von  $\mathbb{R}^3$ ).
- (ii) Zeigen Sie:  $\text{Ker } G \subset \text{Ker } F$ .
- (iii) Finden Sie eine lineare Abbildung  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $H \circ G = F$ .

**Aufgabe 45** (5\* Punkte). *Beschränkte Folgen*

Es sei  $\ell^\infty$  gegeben als die Menge aller beschränkten reellen Folgen, d.h.  $\ell^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \text{es existiert } C > 0 \text{ mit } |x_j| < C \text{ für jedes } j \in \mathbb{N}\}$ . Zeigen Sie

- (i) Mit der üblichen (eintragweisen) Addition  $\ell^\infty$  und (eintragweisen) Skalarmultiplikation wird  $\ell^\infty$  zu einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,
- (ii) Der Vektorraum  $\ell^\infty$  ist nicht endlichdimensional.

**Aufgabe 46** (5\* Punkte). *Eine Basis für  $\text{Hom}_K(V, W)$*

Es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume mit den Basen  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  beziehungsweise  $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ . Nun seien  $F_i^j$  lineare Abbildungen, welche durch

$$F_i^j(v_k) = \begin{cases} w_i & \text{falls } k = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $i = 1, \dots, m$  und  $j, k = 1, \dots, n$  definiert werden. Zeigen Sie

- (i) Die obigen Abbildungen  $F_i^j$  existieren und sind eindeutig,
- (ii) Die Abbildungen  $F_i^j$  bilden eine Basis von  $\text{Hom}_K(V, W)$ .

---

Abgabe dieses Übungsblattes in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Das Übungsblatt muss bis **15:00** Uhr am angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Alle Punkte auf Aufgaben auf diesem Übungsblatt zählen zu Ihrer Gesamtpunktzahl, die möglichen Punkte aber nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl.