Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige
Wintersemester 2017

Lineare Algebra 1

Blatt 1

Abgabe: 26. Oktober 2017

Normalformen

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe)**.** *Ja oder nein?*

Sind die folgenden Gleichungssysteme in Normalform?

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ & x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 2 \\ & & 0x_3 & +0x_4 & = & 3 \\ 0x_1 & & & +0x_4 & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccccc} 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & +x_2 & +0x_3 & +0x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2 (Präsenzaufgabe)**.** *Jetzt für Matrizen*

Sind die folgenden Matrizen in Normalform?

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Präsenzaufgabe)**.** *Matrizen und Gleichungssysteme*

(a) Notieren Sie die Matrizen zu den Gleichungssystemen aus Aufgabe 1.
(b) Notieren Sie die Gleichungssysteme zu den Matrizen aus Aufgabe 2, wobei Sie die rechte Seite einfach allgemein als $(b_1, \dots, b_m)$ schreiben.
(c) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten (Lösungsmengen) der obigen Gleichungssysteme (für diejenigen, welche in Normalform sind), falls diese lösbar sind bzw. geben Sie die rechten Seiten an, für welche Lösungen existieren sowie die Lösungsmengen an.

Aufgabe 4 (Präsenzaufgabe)**.** *Permutation*

Beschreiben Sie die Matrizen, welche, wenn Sie auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wirken, dessen Einträge permutieren.

Aufgabe 5 (Präsenzaufgabe). *Der Kern*

(a) Zeigen Sie, dass ein homogenes lineares Gleichungssystem mit $m \times n$-Matrix immer mindestens eine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass ein homogenes lineares Gleichungssystem mit $m \times n$-Matrix in Normalform genau dann mehr als eine Lösung besitzt, wenn für dessen Rang k gilt $k < n$.

Aufgabe 6 (5 Punkte). *Noch einmal*

(a) Schreiben Sie ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit 4 Zeilen und 5 Spalten und Rang $k = 3$ in Normalform.

(b) Schreiben Sie ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit 4 Zeilen und 4 Spalten und Rang $k = 4$ in Normalform.

(c) Schreiben Sie ein allgemeines lineares Gleichungssystem mit 5 Zeilen und 4 Spalten und Rang $k = 4$ in Normalform.

Aufgabe 7 (5 Punkte). *Rotation*

(a) Welche 2×2-Matrix R dreht einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ um 90°? Es muss gelten

$$Rx = R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Welche 2×2-Matrix R dreht einen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ um 180°?

Aufgabe 8 (5 Punkte). *Rang Eins*

Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, sowie $s, r \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit der Eigenschaft, dass $\sum_{j=1}^n s_j r_j = 0$. Wir definieren $V = s \otimes r$ als die Matrix mit den Einträgen $v_{ij} = s_i r_j$ für $i, j = 1 \dots n$. Zeigen Sie, dass gilt

$$(\mathrm{Id_n} - s \otimes r)(\mathrm{Id_n} + s \otimes r)x = x$$

für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $\mathrm{Id_n}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix (d.h. Eins auf der Diagonale, Null sonst) darstellt. Addition bzw. Subtraktion von Matrizen erfolgt eintragsweise, also

$$(\mathrm{Id_n} \pm s \otimes r) = \begin{pmatrix} 1 \pm s_1 r_1 & \pm s_1 r_2 & \pm s_1 r_3 & \dots & \pm s_1 r_n \\ \pm s_2 r_1 & 1 \pm s_2 r_2 & \pm s_2 r_3 & \dots & \pm s_2 r_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \pm s_{n-1} r_1 & \dots & & 1 \pm s_{n-1} r_{n-1} & \pm s_{n-1} r_n \\ \pm s_n r_1 & \dots & & \pm s_n r_{n-1} & 1 \pm s_n r_n \end{pmatrix}$$

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden. Die Präsenzaufgaben müssen nicht abgegeben werden.