

Lineare Algebra 1

Blatt 11

Abgabe: 18. Januar 2018

Isomorphiesätze, Matrizen

Aufgabe 47 (Präsenzaufgabe).

- (i) Seien R ein kommutativer Ring, A eine $l \times m$ Matrix mit Einträgen aus R und B eine $m \times n$ Matrix auch mit Einträgen aus R . Zeigen Sie, dass $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.
- (ii) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ heisst echte obere Dreiecksmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Zeigen Sie, dass eine echte obere Dreiecksmatrix A nilpotent ist, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$.

Aufgabe 48 (5 Punkte). *Isomorphiesätze*

Es seien V ein K -Vektorraum und $V_1, V_2 \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie, dass gilt:

(i)

$$(V_1 + V_2)/V_1 \cong V_2/(V_1 \cap V_2),$$

(ii) Falls $V_1 \subset V_2 \subset V$:

$$(V/V_1)/(V_2/V_1) \cong V/V_2.$$

[*Hinweis*: Verwenden Sie den Homomorphiesatz. Für (i) betrachten Sie

$$F : V_2 \rightarrow (V_1 + V_2)/V_1, x \mapsto [x],$$

und für (ii) betrachten Sie $F : V/V_1 \rightarrow V/V_2, [x] \mapsto [x]$.]

Aufgabe 49 (5 Punkte). *Matrixmultiplikation*

Bilden Sie alle möglichen Matrixprodukte (einschliesslich dreifacher Produkte) aus den folgenden drei reellen Matrizen und berechnen Sie diese.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 100 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -5 & 7 \\ 12 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50 (5 Punkte). *Unterringe*

Sind die folgenden Teilmengen Unterringe:

- (1) $\{a_{ij} \in \text{Mat}_K(n \times n) : a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\} \subset \text{Mat}_K(n \times n)$,
- (2) $\{a_{ij} \in \text{Mat}_K(n \times n) : a_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j + k \text{ oder } j \geq i + k\} \subset \text{Mat}_K(n \times n)$, mit einem $k \in \mathbb{N}$,
- (3) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in K \right\} \subset \text{Mat}_K(2 \times 2)$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **15:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.