Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2017

Lineare Algebra 1
Blatt 12
Abgabe: 25. Januar 2018
Matrizen, Matrizen, Matrizen

Aufgabe 51 (Präsenzaufgabe)**.**
Seien $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ und $b \in K^m$. Zeigen Sie:

(i) Der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist genau dann nicht leer, wenn $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b)$ gilt, wobei $(A|b)$ die erweiterte Matrix darstellt.
(ii) Falls x_1 eine spezielle Lösung von $Ax = b$ ist, so lässt sich der Lösungsraum als $x_1 + \ker A$ darstellen.

Aufgabe 52 (5 Punkte)**.** *Inverse Matrizen*
Wir wollen eine Methode angeben, um die Inverse einer Matrix auszurechnen: Sei dazu $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ invertierbar, d.h. $\mathrm{rang}\, A = n$.
Zeigen Sie: Ist $x^i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})^\top$ die Lösung des Gleichungssystems $Ax = e_i$, so ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} := X,$$

d.h. $AX = \mathrm{Id}$.
Berechnen Sie auf diese Weise die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 53 (5 Punkte)**.** *Zeilenoperationen und Elementarmatrizen*
Für eine $m \times n$ Matrix betrachten wir die folgenden Zeilenoperationen:

(I) Multiplikation der i-ten Zeile mit λ.
(II) Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile.
(III) Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile.

Wie man leicht sieht, können (I), (II) und (III) durch Linksmultiplikation mit den folgenden sogenannten *Elementarmatrizen* realisiert werden:

$$S_i(\lambda) := \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & \vert & & & & \vert & & & \\ & \ddots & & \vert & & & & \vert & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ - & - & - & \lambda & - & - & - & 0 & - & - & - \\ & & & \vert & 1 & & & \vert & & & \\ & & & \vert & & \ddots & & \vert & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ - & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\ & & & \vert & & & & \vert & 1 & & \\ & & & \vert & & & & \vert & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

(mit λ in der (i,i)-Position)

$$Q_i^j(\lambda) := \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & | & & & & | & & & \\
& \ddots & & | & & & & | & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
- & - & - & 1 & - & - & - & \lambda & - & - & - \\
& & & | & 1 & & & | & & & \\
& & & | & & \ddots & & | & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
- & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\
& & & | & & & & | & 1 & & \\
& & & | & & & & | & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)$$

(mit λ in der (i, j)-Position)

$$P_i^j := \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & | & & & & | & & & \\
& \ddots & & | & & & & | & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
- & - & - & 0 & - & - & - & 1 & - & - & - \\
& & & | & 1 & & & | & & & \\
& & & | & & \ddots & & | & & & \\
& & & & & & 1 & & & & \\
- & - & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - \\
& & & | & & & & | & 1 & & \\
& & & | & & & & | & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)$$

(mit den ausserdiagonalen Einsen in den (i, j)- und (j, i)-Positionen)

Wie man auch leicht nachsieht, gilt

$$(S_i(\lambda))^{-1} = S_i\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \left(Q_i^j(\lambda)\right)^{-1} = Q_i^j(-\lambda)\text{und} \quad \left(P_i^j\right)^{-1} = P_i^j.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie sowohl A als auch A^{-1} als Produkt von Elementarmatrizen dar.

Aufgabe 54 (5 Punkte)**.** *Ein Rangsatz*

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$. Sei der Spaltenrang (bzw. Zeilenrang) von A als die maximale Anzahl von linearunabhängigen Spalten (bzw. Zeilen) in A definiert.
Zeigen Sie, dass

$$\text{Spaltenrang } A = \text{Zeilenrang } A.$$

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **15:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.