Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2017

Lineare Algebra 1

Blatt 13

Abgabe: 1. Februar 2018

Permutationen, Dualität, k-Formen

Aufgabe 55 (Präsenzaufgabe)**.**
Sei die Permuation P durch die Umordnung

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6) \to (5, 3, 2, 4, 6, 1)$$

definiert. Berechnen Sie die Signatur von P und stellen Sie P als Produkt von Transpositionen dar.

Aufgabe 56 (5 Punkte)**.** *Orthogonaler Raum*
Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$W^0 := \{\alpha \in V^* |\ \alpha(w) = 0\ \forall\, w \in W\}$$

der zu W *orthogonale Raum*.

Sei weiters V endlichdimensional. Zeigen Sie: $W^0 \subset V^*$ ist ein Untervektorraum der Dimension

$$\dim W^0 = \dim V - \dim W.$$

[*Hinweis:* Betrachten Sie eine Basis $(v_1, \ldots, v_r)$ von W und ergänzen Sie sie zu einer Basis $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von V. Dann zeigen Sie, dass $W^0 = \operatorname{span}_K\{v^*_{r+1}, \ldots, v^*_n\}$, wobei $(v^*_1, \ldots, v^*_n)$ die zugehörige duale Basis von V^* darstellt.]

Aufgabe 57 (5 Punkte)**.** *Transposition*
V und W seien K-Vektorräume, $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ sei Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ sei Basis von W sowie $F \in \mathrm{Hom}_\mathrm{K}(V, W)$.
Zeigen Sie, dass

$$(M(\mathcal{B}, F, \mathcal{A}))^\top = M(\mathcal{A}^*, F^\top, \mathcal{B}^*),$$

wobei $\mathcal{A}^* = (v^*_1, \ldots, v^*_n)$, $\mathcal{B}^* = (w^*_1, \ldots, w^*_m)$ die zu $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dualen Basen sind.
[*Hinweis:* Die darstellenden Matrizen von F bzw. $F^\top$ sind durch $F(v_i) = \sum_{l=1}^m a_{li} w_l$ bzw. $F^\top(w^*_j) = \sum_{l=1}^n \tilde{a}_{lj} v^*_l$ definiert. Diese Formeln dürfen auf beliebige Basisvektoren von W^* bzw. V angewendet werden.]

Aufgabe 58 (5 Punkte)**.** *k-Formen*
Seien U und V K-Vektorräume. Zeigen Sie

(i) Jede Linearkombination von k–Formen auf V ist wieder eine k–Form.
(ii) Sei $\phi : V \to U$ eine lineare Abbildung und μ eine k–Form auf U. Dann ist μ^ϕ, definiert durch

$$\mu^\phi(a_1, \ldots, a_k) = \mu(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_k))$$

eine k-Form auf V.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **15:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.