Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Wintersemester 2017
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Lineare Algebra 1

Blatt 4

Abgabe: 16. November 2017

Aufgabe 17 (Präsenzaufgabe). *Injektivität und Surjektivität*

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$

(b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1,$

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y).$

Aufgabe 18 (5 Punkte). *Komposition*

1) Es seien $f: X \to Y, g: Y \to Z$ Abbildungen, sowie $g \circ f: X \to Z$ die Komposition von f und g. Zeigen Sie
   (a) Falls f und g surjektiv sind, so ist auch $g \circ f$ surjektiv,
   (b) Falls f und g injektiv sind, so ist auch $g \circ f$ injektiv,
   (c) Falls $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv,
   (d) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.
2) Durch eine $m \times n$-Matrix A lässt sich eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ mittels $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ für $i = 1, \dots, m$ definieren. Nun sei A eine solche $m \times n$-Matrix und B eine $l \times m$-Matrix. Damit ist nun auch eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ durch Hintereinanderausführung von A und danach B definiert. Existiert eine Matrix C, welche diese Abbildung darstellt? Wenn ja, was sind die Einträge von C?

Aufgabe 19 (5 Punkte). *Teilmengen*

Seien M und N endliche Mengen mit Mächtigkeiten $\#M = m$ und $\#N = n$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass gilt $\#\mathrm{Abb}(M, N) = n^m$,

Aufgabe 20 (5 Punkte). *Gleichmächtigkeit*

Zwei Mengen X und Y heißen gleichmächtig genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt. Eine Menge X heißt abzählbar unendlich, falls X und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich sind.

(c) Für eine nichtleere Menge M sei $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ die Menge aller Abbildungen von M nach $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass M und $\mathrm{Abb}(M, \{0, 1\})$ nicht gleichmächtig sind.

Hinweis: Denken Sie für (a) quadratisch.

Anmerkung: Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar unendlich. Dies folgt aus dem Diagonalargument von Cantor.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **17:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.