

Lineare Algebra 1

Blatt 5

Abgabe: 23. November 2017

Gruppen

Aufgabe 21 (Präsenzaufgabe). *Kürzung*

Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe, so gelten die folgenden Kürzungsregeln:

$$a \cdot \tilde{x} = a \cdot x \Rightarrow x = \tilde{x}, \quad \text{und} \quad y \cdot a = \tilde{y} \cdot a \Rightarrow y = \tilde{y}.$$

Aufgabe 22 (5 Punkte). *Kleine Gruppen*

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit höchstens vier Elementen. Welche davon sind abelsch?

Aufgabe 23 (5 Punkte). *Erzeugte Untergruppen*

Sei G eine Gruppe und $A \subset G$. Die von A erzeugte Untergruppe $\text{erz}(A)$ ist definiert durch

$$\text{erz}(A) = \{a_1 \cdot \dots \cdot a_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}.$$

$\text{erz}(A)$ ist somit die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus A bzw. deren Inversen. Zeigen Sie, dass $\text{erz}(A)$ die 'kleinste' Untergruppe von G ist, die A enthält, d.h.

- (i) $\text{erz}(A) \subset G$ ist eine Untergruppe.
- (ii) Ist $U \subset G$ eine Untergruppe mit $A \subset U$, so folgt $\text{erz}(A) \subset U$

Wie sieht $\text{erz}(A)$ aus für den Fall, dass A einelementig ist?

Aufgabe 24 (5 Punkte). *Quotientengruppen*

Zeigen Sie: Ist G eine abelsche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist durch

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G erklärt. Sei $G/H = G/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, und die zu $x \in G$ gehörige Äquivalenzklasse sei mit \bar{x} bezeichnet. Sind $x, x', y, y' \in G$ mit $x \sim x'$ und $y \sim y'$, so ist $xy \sim x'y'$. Somit kann man auf G/H durch

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{xy}$$

eine Verknüpfung erklären.

Zeigen Sie, dass G/H auf diese Weise zu einer abelschen Gruppe wird und für $G = \mathbb{Z}, H = n\mathbb{Z}$ genau die in der Vorlesung definierten zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entstehen.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **17:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.