Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2017

Lineare Algebra 1

Blatt 6

Abgabe: 30. November 2017

Gruppen, Ringe, Körper, Äquivalenz

Aufgabe 24 (5 Punkte). *Quotientengruppen*

Zeigen Sie: Ist G eine abelsche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist durch

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G erklärt. Sei $G/H = G/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen, und die zu $x \in G$ gehörige Äquivalenzklasse sei mit $\bar{x}$ bezeichnet. Sind $x, x', y, y' \in G$ mit $x \sim x'$ und $y \sim y'$, so ist $xy \sim x'y'$. Somit kann man auf G/H durch

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := \overline{xy}$$

eine Verknüpfung erklären.

Zeigen Sie, dass G/H auf diese Weise zu einer abelschen Gruppe wird und für $G = \mathbb{Z}, H = n\mathbb{Z}$ genau die in der Vorlesung definierten zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entstehen.

Aufgabe 25 (Präsenzaufgabe). *Ringhomomorphismen*

K und K' seien zwei Körper und $\phi : K \to K'$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass ϕ entweder injektiv oder der Nullhomomorphismus ist.

Aufgabe 26 (5 Punkte). *Äquivalenzrelationen*

Welche der folgenden Relationen ist eine Äquivalenzrelation?

(a) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$ definiert durch: $a \sim b$ falls $a^2 - b^2 \leq 7$.
(b) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$ definiert durch: $a \sim b$ falls $2a + 5b \equiv 0 \pmod{7}$.
(c) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$ definiert durch: $a \sim b$ falls $a + b \equiv 0 \pmod{5}$.
(d) Die Relation R auf $\mathbb{Z}$ definiert durch: $a \sim b$ falls $a^2 + b^2 = 0$.

Aufgabe 27 (5 Punkte). *Kleine Körper*

Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle Körper mit 3 bzw. 4 Elementen.

Achtung! Abgabefrist wurde um 2 Stunden vorverlegt. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **15:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.