

Lineare Algebra 1

Blatt 7

Abgabe: 7. Dezember 2017

Komplexe Zahlen, Vektorräume

Aufgabe 28 (Präsenzaufgabe). *'Abb' ist ein Vektorraum*

Seien X eine Menge, K ein Körper und $V = \text{Abb}(X, K)$ die Menge aller Abbildungen von X nach K . Zeigen Sie, dass durch geeignete Definitionen von Addition und Skalarmultiplikation V zu einem Vektorraum (über K) wird.

Aufgabe 29 (5 Punkte). *Komplexe Zahlen*

- (a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $z\bar{z} = |z|^2$.
(b) Es seien $v, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, und sei $F_{v,z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $F_{v,z}(w) = v + z\bar{w}$. Es sei $u \in \mathbb{C}$ mit $u^2 = z$. Wir schreiben $\bar{u}v = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Es seien $S_{v,z}$ und $T_{v,z} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$S_{v,z}(w) = bui + z\bar{w} \quad \text{und} \quad T_{v,z}(w) = au + w.$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$F_{v,z} = S_{v,z} \circ T_{v,z} = T_{v,z} \circ S_{v,z}$$

- (c) Finden Sie ein $w_0 \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\{w \in \mathbb{C} \mid S_{v,z}(w) = w\} = \{w_0 + tu \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

- (d) Zeigen Sie: die Abbildung $T_{v,z}$ bildet die Menge aus (c) auf sich selbst ab.
(e) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Abbildungen $F_{v,z}$, $S_{v,z}$ und $T_{v,z}$ anhand von (c) und (d).

Aufgabe 30 (5 Punkte). *Produkte*

Seien V und W zwei K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V \times W$ durch die Verknüpfungen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w),$$

ebenfalls zu einem K -Vektorraum wird.

Aufgabe 31 (5 Punkte). *Trigonometrische Polynome*

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst 2π -periodisch, falls $f(x) = f(x + 2\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $V = \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist.
(b) Zeigen Sie, dass $W = \text{span}\{\cos nx, \sin mx\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ ein Untervektorraum von V ist.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **15:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.