Albert-Ludwigs-Universität Freiburg — Wintersemester 2017
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Lineare Algebra 1
Blatt 9
Abgabe: 21. Dezember 2017
Vektorraum-Homomorphismen, Moduln

Aufgabe 36 (Präsenzaufgabe)**.** *Vektorraum-Homomorphismen*
Seien U, V und W K-Vektorräume, $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $G \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ bildet einen Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$.
(b) $F(0) = 0$ und $F(x-y) = F(x) - F(y)$ für alle $x, y \in V$.
(c) $F \circ G \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$.

Aufgabe 37 (5 Punkte)**.** *Ein Modul ohne Dimension*
Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}$ ist ein Modul (über $\mathbb{Z}$).
(b) Ebenso sind $2\mathbb{Z}$ und $3\mathbb{Z}$ Moduln (über $\mathbb{Z}$).
(c) $\{1\}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$.
(d) $\{2,3\}$ ist auch ein unverkürzbares Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$.

Bem. Für Moduln ist (i.A.) der Begriff der Dimension folglich nicht sinnvoll.

Aufgabe 38 (5 Punkte)**.** *Strukturen auf $\mathrm{Hom}_K(V,V)$*
Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{End}_K(V)$, mit Verkettung als Multiplikation, ist ein Ring, und für alle $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, und alle $\lambda \in K$ gilt $(\lambda f) \circ g = \lambda(f \circ g) = f \circ (\lambda g)$; ein K-Vektorraum, der außerdem eine Ringstruktur trägt, so dass diese Verträglichkeitsbedingung gilt, heißt K-Algebra.
(b) $\mathrm{Aut}_K(V)$ ist eine Gruppe bzgl. Verkettung, aber für $V \neq \{0\}$ kein K-Vektorraum.

Aufgabe 39 (5 Punkte)**.**
U, V und W seien K-Vektorräume, $F \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $G \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$. Zeigen Sie:

(a) Falls F ein Vektorraum-Isomorphismus ist, dann gilt $F^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(W,V)$.
(b) Ist I eine Indexmenge und $(v_j)_{j\in I} \in V$, dann gilt:
  (i) $(v_j)_{j\in I}$ ist linear abhängig $\Rightarrow (F(v_j))_{j\in I}$ ist linear abhängig.
  (ii) $(F(v_j))_{j\in I}$ ist linear unabhängig $\Rightarrow (v_j)_{j\in I}$ ist linear unabhängig.
(c) (i) Ist $\tilde{V} \subset V$ ein Untervektorraum, dann ist auch $F(\tilde{V}) \subset W$ ein Untervektorraum; insbesondere ist $\mathrm{im}(F) \subset W$ ein Untervektorraum.
  (ii) Ist $\tilde{W} \subset W$ ein Untervektorraum, dann ist auch $F^{-1}(\tilde{W}) \subset V$ ein Untervektorraum; insbesondere ist $\ker(F) \subset V$ ein Untervektorraum.
  (iii) Ist F ein Isomorphismus, dann gilt $F(\tilde{V}) \cong \tilde{V}$ für jeden Untervektorraum $\tilde{V} \subset V$.
(d) $\dim(\mathrm{im}(F)) \leq \dim(V)$.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im UG der Eckerstraße 1. Die Übungsblätter müssen bis **15:00** Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.