Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Keith Anguige

Wintersemester 2017

Lineare Algebra 1 – Klausurvorbereitungsblatt

Von den Aufgaben 1–4 wird mindestens eine Aufgabe in der Klausur gestellt.

Aufgabe 1. *Lineare Gleichungen, Determinanten*

(i) Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ t+10 \end{pmatrix}.$$

(ii) Berechnen Sie die folgende 4×4 Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *Gruppen*

(i) Sei G eine Menge und '$*$' eine Verknüpfung auf G, das heißt $\ * : G \times G \to G$. Weiters sei $H \subset G$. Unter welchen Bedingungen ist

(a) $(G, *)$ eine Gruppe,

(b) $(H, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$?

(ii) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $A \subset G$. Die von A erzeugte Untergruppe $\mathrm{erz}(A)$ ist definiert durch

$$\mathrm{erz}(A) = \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n : n \in \mathbb{N}, a_i \in A \text{ oder } a_i^{-1} \in A\}.$$

Somit ist $\mathrm{erz}(A)$ die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus A bzw. deren Inversen.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{erz}(A) \subset G$ ist eine Untergruppe.

(b) Zeigen Sie: Ist $U \subset G$ eine Untergruppe mit $A \subset U$, so folgt $\mathrm{erz}(A) \subset U$.

(c) Wie sieht $\mathrm{erz}(A)$ aus für den Fall, dass A einelementig ist?

Aufgabe 3. *Kern & Bild*

(i) Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $F \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeigen Sie, dass

$$(\mathrm{Im}(F^\top))^\perp = \mathrm{Ker}(F),$$

wobei für $U \subset W$ ein Untervektorraum

$$U^\perp := \{\alpha \in W^* | \ \alpha(u) = 0 \ \forall \ u \in U\}.$$

(ii) Seien die Matrizen F_1 und F_2 durch

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Bestimmen Sie jeweils Basen von $\mathrm{Ker}(F_i)$ und $\mathrm{Im}(F_i)$, $i = 1, 2$.

Aufgabe 4. *Determinanten in einem Vektorraum*

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_n\}$ und μ sei eine Volumenform auf V (d.h., eine nicht-triviale n-Form). Weiters sei $F \in \mathrm{End}_K(V)$. In der Vorlesung wurde $\det(F)$ definiert als die Zahl, so dass

$$\mu^F(x_1, \dots, x_n) := \mu(Fx_1, \dots, Fx_n) = \det(F)\mu(x_1, \dots, x_n).$$

Nun sei $\mathrm{M}(\mathcal{A}, F, \mathcal{A})$ die Matrix, welche die Abbildung F bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ darstellt. Zeigen Sie

$$\det(\mathrm{M}(\mathcal{A}, F, \mathcal{A})) = \det(F).$$

[Hinweis: Für μ darf man o.B.d.A. die Standardform $\mu_0 : \mu_0(x_1, \dots, x_n) = 1$ nehmen.]

Reguläre Beispielaufgaben.

Aufgabe 5. *Folgen*

Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gegeben als die Menge aller reellen Folgen, d.h.

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots\}.$$

Zeigen Sie

(i) Mit der üblichen (eintragweisen) Addition und (eintragweisen) Skalarmultiplikation wird $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum,

(ii) Der Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist nicht endlichdimensional.

Aufgabe 6. *Basiswechsel*

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$\mathcal{A} = \{(1, -1, 2), (2, 3, 7), (2, 3, 6)\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \{(1, 2, 2), (-1, 3, 3), (-2, 7, 6)\}$$

gegeben.

(i) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

(ii) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot (1, -1, 2) + 9 \cdot (2, 3, 7) - 8 \cdot (2, 3, 6)$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 7. *Noch mehr lineare Gleichungen*

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 19 \\ 23 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Hinweise zur Klausur

- Die Klausur findet statt in den Räumen HS Rundbau (Albertstr. 21 Flachb.+HS)), HS 1010 (Kollegiengebäude I), Großer HS Physik und HS Biologie II/III (Schänzlestr.).
- Zeit: Montag, 26.03.2018, 10:00–13:00
- Bitte informieren Sie sich, in welchem Hörsaal Sie die Klausur schreiben. Es gibt dazu in den kommenden Wochen noch ein Informationsdokument auf der Website.
- Seien Sie *unbedingt* mindestens 15 Minuten vor der Klausur in vor Ihrem Hörsaal anwesend.
- Beachten Sie die Vorlesungswebsite für weitere aktuelle Informationen zur Klausur.
- Keinerlei Hilfsmittel sind zugelassen. Sie benötigen einen schwarzen oder dunkelblauen Stift, bitte schreiben Sie die Klausur nicht mit Bleistift. Papier wird von uns gestellt.
- Bringen Sie Ihren Studentenausweis.