

## Numerik 1

Blatt 1

Abgabe: 26. Oktober 2017

*Aufwand und Matrizen*

### **Aufgabe 1** (Präsenzaufgabe). *Aufwand*

Bestimmen Sie die Größenordnung des Aufwands für die Matrix-Vektor-Multiplikation, die Matrix-Matrix-Multiplikation sowie die Bestimmung der Determinante einer Matrix mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

### **Aufgabe 2** (Präsenzaufgabe). *Das Alter des Universums*

Ein Rechner arbeite mit  $10^9$  Gleitkommaoperationen pro Sekunde und es seien drei Algorithmen mit Aufwand  $\mathcal{O}(n)$ ,  $\mathcal{O}(n^3)$  bzw.  $\mathcal{O}(n!)$  zur Lösung derselben Aufgabe gegeben.

Wieviele Sekunden, Stunden, Tage oder Jahre benötigen die Algorithmen etwa für die Problemgrößen  $n = 10^k$  mit  $k = 1, 2, \dots, 6$ ?

### **Aufgabe 3** (Präsenzaufgabe). *Gruppeneigenschaften*

Zeigen Sie, dass die invertierbaren (bzw. normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, d.h. sind  $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  untere Dreiecksmatrizen mit  $\det L_i \neq 0$  (bzw.  $(L_i)_{jj} = 1$  für  $j = 1, \dots, n$ ), so sind  $L_0^{-1}$  und  $L_1 L_2$  ebenfalls invertierbare (bzw. normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

### **Aufgabe 4** (Präsenzaufgabe). *Kern, Bild, Rang*

(1) Zeigen Sie, dass  $(\operatorname{im} A^T)^\perp = \ker A$  mit

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \cdot w = 0 \text{ für alle } w \in V\}$$

(2) Beweisen Sie die Dimensionsformel  $n = \dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A)$  und folgern Sie, dass  $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$ , wobei für eine Matrix  $M$  der Spaltenrang von  $M$  durch  $\operatorname{rank} M = \dim(\operatorname{im} M)$  definiert ist.

**Aufgabe 5** (4 Punkte). *Rücksubstitution*

Berechnen Sie die Größenordnung des Aufwands zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit  $n \times n$  oberer Dreiecksmatrix.

**Aufgabe 6** (4 Punkte). *Eine Richtung ist sehr einfach*

Zeigen Sie, dass gilt  $\ker A^T A = \ker A$ .

Hinweis: Betrachten Sie Aufgabe 4.

**Aufgabe 7** (4 Punkte). *Diagonaldominante Matrizen*

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine strikt diagonaldominante Matrix, d.h. es gelte

$$\sum_{j=1, \dots, n, j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

- (1) Zeigen Sie, dass die Teilmatrizen  $A_k := (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq k$ , für  $k = 1, 2, \dots, n$  ebenfalls strikt diagonaldominant sind.
- (2) Zeigen Sie, dass die Matrix  $A$  regulär ist.

Hinweis: Zeigen Sie zum Nachweis von (2), dass der Kern von  $A$  der Nullraum ist.

**Aufgabe 8** (4 Punkte). *Schurkomplement*

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär und  $1 \leq m \leq n$ , sodass die obere linke  $m \times m$ -Teilmatrix  $A_{11} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$  ebenfalls regulär ist. Sei  $A$  zerlegt gemäss

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Schurkomplement  $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  regulär ist und, dass  $A^{-1}$  gegeben ist durch

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}S^{-1} \\ -S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Für den ersten Teil bemerken Sie, dass

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Id} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & S \end{bmatrix}$$

und benutzen die Determinantenformel für eine Blockdreiecksmatrix.

Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im 2. Stock in der Hermann-Herder-Str. 10, neben dem Eingang zu Raum 201 (CIP). Die Übungsblätter müssen bis 18:00 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.